DEC 2

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 163

Heft 2

Ausgegeben den 25. November 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Band 163. Heft 2.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hopf, Heinz, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten	71
Jung, Heinrich, Die 2. Greenschen Funktionen als Kerne von homogenen Integralgleichungen zweiter Art	89
Adelsberger, Hertha, Über unendliche diskrete Gruppen	103
Schumacher, Robert, Zwei- und Drei-Punktsysteme auf Kurven	125
Berichtigung zu einer früheren Arbeit von F. Löbell	134
Berichtigung zu der Arbeit von E. Kamke	134

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.

Von *Heinz Hopf* in Berlin.

Die Versuche der kombinatorischen Topologie, die Zusammenhangsverhältnisse der n-dimensionalen Komplexe und Mannigfaltigkeiten zu beschreiben, führen zu algebraischen Betrachtungen, nämlich zur Betrachtung von *Gruppen*, die mit dem geometrischen Gebilde topologisch invariant verknüpft sind: es sind dies die Fundamentalgruppe und die Gruppen der i-dimensionalen Homologieklassen ($i = 0, 1, \ldots, n$). Handelt es sich um (geschlossene und orientierbare) *Mannigfaltigkeiten*, so läßt sich diesen von Poincaré eingeführten Begriffen dadurch etwas wesentlich Neues hinzufügen, daß man die Homologiegruppen der verschiedenen Dimensionszahlen zu einem *Ring* verschmilzt: man hat — wie unten ausführlicher auseinandergesetzt werden wird — den *Schnitt* zweier Zyklen (geschlossener Komplexe) in der Mannigfaltigkeit als *Produkt* zu deuten, was auf Grund neuerer Untersuchungen von Alexander und Lefschetz auf keine Schwierigkeit stößt. Diese Gruppen und Ringe bilden nach dem gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse im wesentlichen das algebraische Gerüst der Mannigfaltigkeiten, das deren Zusammenhangsverhältnisse schildert, freilich ohne sie zu erschöpfen.

Eine eindeutige und stetige (nicht notwendigerweise eindeutig umkehrbare) Abbildung f einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ bewirkt eine eindeutige Abbildung des Ringes und der Fundamentalgruppe der ersteren auf Ring und Fundamentalgruppe der letzteren. Die Gesamtheit der Eigenschaften dieser Gruppen- und Ringbeziehungen möge als *Algebra* der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden; von *Topologie* der Abbildungen wird man sprechen, wenn man nicht die Gruppen- und Ringelemente, sondern die Punkte der beiden Mannigfaltigkeiten und die durch f zwischen ihnen vermittelten Beziehungen betrachtet. Es ist von besonderem Interesse, den Zusammenhängen zwischen Algebra und Topologie einer Abbildung nachzugehen; ein Beispiel eines solchen Zusammenhanges ist der Lefschetzsche Fixpunktsatz [1]), der die Fixpunktzahl einer Abbildung von M auf sich — also eine topologische Eigenschaft — mit den Spuren der Substitutionen, denen die Homologiegruppen unterworfen werden, — also mit algebraischen Eigenschaften — in Verbindung bringt; ein anderes einfacheres Beispiel liefert die Betrachtung des Abbildungsgrades c von f: er läßt sich einerseits algebraisch durch die Homologie $f(M) \sim c\mu$ definieren und kann andererseits (wenigstens seinem absoluten Betrage nach) topologisch als die Mindestzahl der eineindeutigen Bedeckungen eines Gebietes von μ charakterisiert werden, die sich durch stetige Abänderung von f erreichen läßt [2]), woraus insbesondere die wesentliche topologische Verschiedenheit der Abbildungen mit $c \neq 0$ von denen mit $c = 0$ erhellt: die ersteren sind dadurch *gekennzeichnet*, daß man

[1]) *S. Lefschetz*, (a) Intersections and transformations of complexes and manifolds; (b) Manifolds with a boundary and their transformations; Trans. Am. Math. Soc. **XXVIII** (1926), **XXIX** (1927).

[2]) *H. Hopf*, Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Zweiter Teil, Math. Annalen **102** (1929); *H. Kneser*, Glättung von Flächenabbildungen, Math. Annalen **100** (1928).

keinen Punkt von μ durch stetige Änderung von f von der Bedeckung durch die Bildmenge befreien kann.

In dieser Arbeit werden Sätze über die durch Abbildungen von M auf μ zwischen den Homologiegruppen und -ringen der beiden Mannigfaltigkeiten hergestellten Beziehungen bewiesen; die Fundamentalgruppen werden nur gelegentlich und dann im wesentlichen als Hilfsmittel herangezogen. Die Sätze zeigen, daß auch diese algebraischen Beziehungen wesentlich verschiedenartig ausfallen, je nachdem der *Abbildungsgrad* von 0 verschieden oder 0 ist, und daß überhaupt der Betrag des Grades eine beherrschende Rolle spielt. Sie liefern unter anderem für die Gesamtheit der möglichen Abbildungen von M auf μ Einschränkungen, die man aus den Eigenschaften der beiden Ringe ablesen kann; die einfachste derartige Bedingung lautet, daß man M auf μ nicht mit einem von 0 verschiedenen Grade abbilden kann, falls für irgendein i die i-te Bettische Zahl von M kleiner ist als die i-te Bettische Zahl von μ. Als wesentliches Hilfsmittel beim Beweis des Hauptsatzes (Satz I, § 3), aus dem sich alles andere leicht ergibt, dient die *Produktmannigfaltigkeit* von M und μ, deren Wert für die Untersuchung der Abbildungen seit den Arbeiten von Lefschetz [1]) feststeht. [3])

§ 1. Der Homologiering einer Mannigfaltigkeit.

Es sei zunächst kurz an einige Grundbegriffe und -tatsachen aus der kombinatorischen Topologie erinnert, deren Kenntnis hier als bekannt vorausgesetzt werden muß [4]).

Unter dem Orientieren eines n-dimensionalen Komplexes C^n versteht man ein willkürliches Orientieren seiner n-dimensionalen Zellen. Der Rand einer orientierten n-dimensionalen Zelle ist ein wohlbestimmter orientierter $(n-1)$-dimensionaler Komplex; der Rand von C^n ist die Summe der Ränder seiner n-dimensionalen Zellen. Dabei ist diese Summe algebraisch zu bilden, sie ist also eine Linearform in den $(n-1)$-dimensionalen Zellen von C^n; ist sie 0, so heißt C^n geschlossen.

Unter einem in C^n liegenden i-dimensionalen Zyklus versteht man das eindeutige und stetige Bild eines geschlossenen i-dimensionalen Komplexes, das nicht lediglich als Punktmenge in C^n, sondern in bestimmter Weise als Bild seines Originalkomplexes aufzufassen ist. Ein i-dimensionaler Zyklus z^i heißt homolog 0, geschrieben: $z^i \sim 0$, wenn er das Bild des Randes eines in C^n hinein abgebildeten $(i+1)$-dimensionalen Komplexes ist. Da z^i (d. h. sein Original) orientiert ist, ist klar, was man unter $z^i = +z^i$ und unter $-z^i$ zu verstehen hat. Ferner ist die Summe und nach der eben über das Vorzeichen gemachten Bemerkung auch die Differenz zweier Zyklen in naheliegender Weise zu erklären. Statt $z_1^i - z_2^i \sim 0$ sagt man auch: $z_1^i \sim z_2^i$; aus $z_1^i \sim z_2^i$, $z_2^i \sim z_3^i$ folgt $z_1^i \sim z_3^i$; man nennt dann die Zyklen zu derselben Homologieklasse gehörig.

Die i-dimensionalen Homologieklassen bilden bezüglich der Addition eine Abelsche Gruppe. Es gilt der Satz, daß dies eine Gruppe von endlich vielen Erzeugenden ist; sie

---

[3]) Der größte Teil der Sätze dieser Arbeit ist bereits — mit wesentlich umständlicheren, rechnerischen Beweisen — in der folgenden Note mitgeteilt worden: *H. Hopf*, On some properties of one-valued transformations of manifolds, Proc. Nat. Acad. of Sciences U. S. A. 14 (1928), S. 206—214; Druckfehlerberichtigung dazu S. 600.

[4]) Zur Einführung in die kombinatorische Topologie können das Buch von *O. Veblen*, Analysis situs, Cambridge Colloquium 1922, und die folgenden Arbeiten dienen: *J. W. Alexander*, Combinatorial analysis situs, Trans. Am. Math. Soc. **XXVIII** (1926); *E. R. van Kampen*, Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, Dissertation Leiden 1929.

hat also einen endlichen Rang und endlich viele Elementarteiler und ist durch diese Zahlen vollständig bestimmt. Den Rang nennt man die i-te Bettische Zahl, die Elementarteiler die i-ten Torsionskoeffizienten von C^n. Bei dieser Art von Definition ist es klar, daß dies topologische Invarianten von C^n sind. Die genannte Endlichkeitseigenschaft beruht darauf, daß es in jeder Homologieklasse einen Zyklus gibt, der aus i-dimensionalen Zellen der vorgelegten Zelleinteilung von C^n aufgebaut ist, (und in den Beweis dieser Tatsache ist bei der hier skizzierten Darstellung die Schwierigkeit des Beweises der Invarianz von Bettischen Zahlen und Torsionskoeffizienten im wesentlichen verschoben).

Ist $C^n = M$ eine orientierte und geschlossene Mannigfaltigkeit — wir übergehen die verschiedenen Möglichkeiten und Schwierigkeiten bei der Mannigfaltigkeitsdefinition —, so lassen sich [5]) aus irgend zwei Homologieklassen H^i, H^j der Dimensionen i, j Zyklen z^i, z^j auswählen, die aus Zellen von Unterteilungen der gegebenen Zelleinteilung von M aufgebaut sind und sich zueinander in allgemeiner Lage befinden; d. h. eine Zelle Z^i von z^i und eine Zelle Z^j von z^j haben entweder keinen Punkt gemeinsam oder schneiden sich in einer $(i + j - n)$-dimensionalen Zelle einer weiteren Unterteilung; letzteres kommt nur in Frage, wenn $i + j \geqq n$ ist. Es gelten die Sätze, daß der von diesen Durchschnittszellen gebildete Komplex selbst eine Zyklus ist und daß die Homologieklasse, der er angehört, nicht von z^i, z^j, sondern nur von den Klassen H^i, H^j abhängt; sie wird mit $H^i \cdot H^j$ bezeichnet; dabei ist die Orientierung der Durchschnittszelle zweier orientierter Zellen in der orientierten M durch eine einfache Festsetzung gegeben. Die Schnittbildung ist bis auf das Vorzeichen kommutativ; die eben erwähnte Festsetzung liefert $H^i \cdot H^j = (-1)^{(n-i)(n-j)} H^j \cdot H^i$. Sie ist ferner distributiv; daraus folgt, daß man die Schnittklasse irgendeiner i-dimensionalen Klasse H^i mit irgendeiner j-dimensionalen Klasse H^j kennt, wenn nur die Schnitte der Elemente $H^i_1, H^i_2, \ldots$ einer Basis der i-dimensionalen Homologieklassengruppe mit den Elementen $H^j_1, H^j_2, \ldots$ einer j-dimensionalen Basis bekannt sind [6]):

$$(1) \qquad H^i_r \cdot H^j_s \sim \sum_u a^u_{rs} H^k_u;$$

dabei durchlaufen die H^k_u eine k-dimensionale Basis mit $k = i + j - n$. Beim Übergang zu anderen i-, j- und k-dimensionalen Basen ändert sich das Koeffizientenschema a^u_{rs}, es besitzt jedoch gewisse Invarianten; eine solche ist z. B. der Rang der Gruppe derjenigen k-dimensionalen Klassen, die als Schnitte i-dimensionaler Klassen mit j-dimensionalen Klassen auftreten. Diese gegenüber Basiswechsel invarianten Größen sind bei homöomorphen Mannigfaltigkeiten einander gleich, sie sind also topologische Invarianten, die „Alexanderschen Schnittinvarianten“ von M.

Die Schnittbildung erfüllt außer dem distributiven auch das assoziative Gesetz: $H^h \cdot (H^i \cdot H^j) = (H^h \cdot H^i) \cdot H^j = H^h \cdot H^i \cdot H^j$ [7]). Man kann nun die eben geschilderten

---

[5]) Die Sätze über die Schnitte von Zyklen in einer Mannigfaltigkeit sind im Teil I der in Fußnote 1 genannten Arbeit (a) von Lefschetz enthalten.

[6]) Die Homologiesysteme (1) und die sich daraus ergebenden Invarianten sind von Alexander eingeführt worden: *J. W. Alexander*, New topological invariants expressible as tensors; On certain new topological invariants of a manifold; Topological invariants of manifolds; On the intersection invariants of a manifold. Proc. Nat. Acad. of Sciences U. S. A. **10** (1924), S. 99—103 und S. 493—494; **11** (1925), S. 143—146. — Auf die in diesen Noten eingeführten Begriffe „mod. π“ gehen wir hier nicht ein; auf Grund von ihnen dürfte sich ein Teil der Ergebnisse dieser Arbeit verschärfen und verallgemeinern lassen.

[7]) Die zum Beweis assoziativen Gesetzes notwendige Vorzeichenbetrachtung ist bei Lefschetz ausgelassen, aber leicht nachzuholen.

Schnittinvarianten, und gleichzeitig die Bettischen und Torsionszahlen, auch folgendermaßen zusammenfassend beschreiben: Wir betrachten nicht mehr wie bisher Zyklen und Homologieklassen einzelner fester Dimensionszahlen, sondern auch Zyklen gemischter Dimension und entsprechende Homologieklassen; wir betrachten also jetzt die Gruppe *aller* Homologieklassen, d. h. die direkte Summe der Gruppen der Homologieklassen der einzelnen Dimensionszahlen i für $i = 0, 1, \ldots, n$. In dieser additiven Gruppe ist auf Grund des distributiven Gesetzes und der Gleichungen (1) für je zwei Elemente ein „Produkt", nämlich die Schnittklasse, definiert, und diese Multiplikation genügt dem assoziativen und zusammen mit der Addition dem distributiven Gesetz. *Die Homologieklassen bilden nunmehr ein System hyperkomplexer Zahlen oder einen Ring mit einer endlichen Basis.* Die Aussage der topologischen Invarianz der Alexanderschen Schnittinvarianten sowie der Bettischen und Torsionszahlen läßt sich in den Satz zusammenfassen: *Die Ringe homöomorpher Mannigfaltigkeiten sind einander dimensionstreu-isomorph.* Dabei ist klar, was unter der Dimensionstreue des Isomorphismus zu verstehen ist: jedem Ringelement reiner, d. h. ungemischter, Dimension muß bei dem Isomorphismus ein Element ebenfalls reiner, und zwar derselben, Dimension entsprechen.

Für manche Zwecke ist es bequem und ausreichend, die Betrachtungen durch eine Modifikation des Homologiebegriffes zu vereinfachen: ein Zyklus z soll „divisionshomolog" 0, oder kurz: „d.-homolog" 0, geschrieben: $z \approx 0$, heißen, wenn es eine von 0 verschiedene Zahl a gibt, so daß $az \sim 0$ ist. Rechnet man mit D.-Homologien statt mit gewöhnlichen Homologien, so bedeutet das, daß man alle „Nullteiler", — d. h. die im Fall der Existenz von Torsionskoeffizienten vorhandenen Klassen H mit $H \neq 0$, $aH \sim 0$, $a \neq 0$ —, gleich 0 setzt; der Name „divisions-homolog" ist dadurch gerechtfertigt, daß aus $aH \approx 0$ stets $H \approx 0$ folgt. Die D.-Homologieklassen bilden ebenfalls bezüglich Addition und Schnittbildung einen Ring; man erhält ihn aus dem früheren durch Nullsetzen aller Nullteiler, d. h. der neue Ring ist der Restklassenring des aus den Nullteilern bestehenden Ideals in dem alten Ring.

Wir werden uns im folgenden ausschließlich mit dem Ring der D.-Homologieklassen beschäftigen und ihn kurz „den Ring von M" nennen. Er soll mit $\mathfrak{R}(M)$, sein Rang, also die Summe aller Bettischen Zahlen, soll mit $P(M)$, die einzelnen Bettischen Zahlen sollen mit $p^i(M)$ bezeichnet werden $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

$\mathfrak{R}(M)$ besitzt eine Eins, nämlich M selbst; denn es ist, wie aus der Definition des Schnittes unmittelbar hervorgeht,

$$M \cdot z = z \cdot M = z \tag{2}$$

für jeden Zyklus z.

Wichtig sind die Dualitätseigenschaften von $\mathfrak{R}(M)$: Nach dem Poincaréschen Dualitätssatz [8]) ist

$$p^i(M) = p^{n-i}(M) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Insbesondere ist $p^0(M) = p^n(M) = 1$; für $i = 0$ und $i = n$ gibt es überdies keine Nullteiler; also ist jeder 0-dimensionale Zyklus einem mit einer Vielfachheit versehenen Punkt homolog, und erst recht d.-homolog. In den Relationen (1) fällt daher für $i + j = n$, $k = 0$ der Index u fort, und die Koeffizienten a_{rs} bilden nach dem Dualitätssatz eine quadratische Matrix. Ihre Betrachtung liefert im Gegensatz zu den anderen Dimensionszahlen keine Alexanderschen Invarianten von M. Nach einem Satz von Veblen [9]) hat

[8]) Beweise finden sich z. B. in dem Buch von Veblen und in der Arbeit von van Kampen (s. Fußn. 4).

[9]) *O. Veblen*, The intersection numbers, Trans. Am. Math. Soc. **XXV** (1923); s. auch die Arbeit von van Kampen.

nämlich ihre Determinante stets den Wert ± 1, und daraus folgt, daß bei geeigneter Basenwahl die Schnittrelationen die Gestalt bekommen:

$$H_r^{n-j} \cdot H_s^j \sim 0 \quad \text{für } r \neq s; \quad H_r^{n-j} \cdot H_r^j \sim H^0,$$

wobei H^0 die durch einen positiv signierten, einfach gezählten Punkt bestimmte 0-dimensionale Homologieklasse ist. Diese Basis $H_1^{n-j}, H_2^{n-j}, \ldots, H_{p^j}^{n-j}$ heißt die zu der Basis $H_1^j, H_2^j, \ldots, H_{p^j}^j$ „duale" Basis; aus dem Veblenschen Satz folgt leicht, daß es zu jeder j-dimensionalen Basis eine und nur eine duale $(n-j)$-dimensionale Basis gibt.

§ 2. Algebraische Abbildungsinvarianten.

Im folgenden sind stets M und μ zwei n-dimensionale, orientierte, geschlossene Mannigfaltigkeiten, und M ist einer eindeutigen und stetigen Abbildung f auf μ unterworfen.

Aus den am Anfang des § 1 genannten Tatsachen folgt unmittelbar, daß die f-Bilder homologer Zyklen in M homologe Zyklen in μ sind und daß das Bild der Summe oder Differenz zweier Zyklen die Summe bzw. Differenz der Bilder der beiden Zyklen ist. Daraus ergibt sich, daß f eine eindeutige Abbildung des Ringes $\mathfrak{R}(M)$ in den Ring $\mathfrak{R}(\mu)$ bewirkt und daß diese Abbildung ein additiver Homomorphismus ist, d. h. daß für jedes Paar von Elementen H_1, H_2 aus $\mathfrak{R}(M)$ die Gleichung $f(H_1 + H_2) \approx f(H_1) + f(H_2)$ gilt.

Da wir Eigenschaften dieser Ringabbildung untersuchen wollen, werden wir zwei Abbildungen f, g von M auf μ als nur unwesentlich voneinander verschieden betrachten, wenn sie dieselbe Ringabbildung bewirken, wenn also $f(z) \approx g(z)$ für jeden Zyklus z aus M ist. Die Gesamtheit aller Abbildungen von M auf μ, die zu f in dieser Beziehung stehen, möge der durch f bestimmte „Abbildungskreis" heißen. Die Sätze, die wir beweisen werden, beziehen sich also auf Eigenschaften, die allen Abbildungen des ganzen Kreises gemein sind und daher als „Kreisinvarianten" von Abbildungen bezeichnet werden können. Da sich die Homologieklasse eines Zykels bei stetiger Abänderung des Zykels nicht ändert, gehören zwei Abbildungen, die sich durch stetige Modifikation auseinander herstellen lassen, die also derselben „Abbildungsklasse" angehören, erst recht demselben Kreis an; ein solcher zerfällt also im allgemeinen in ein System von Abbildungsklassen, und die Kreisinvarianten, die in der in der Einleitung gebrauchten Ausdrucksweise zu den „algebraischen" Invarianten der Abbildung gehören, sind a fortiori „Klasseninvarianten".

Es ist leicht, numerische Kreisinvarianten anzugeben. Da die Ringabbildung ein additiver Homomorphismus ist, wird sie für jede Dimensionszahl i durch eine lineare Substitution einer i-dimensionalen D.-Homologiebasis $z_1^i, z_2^i, \ldots, z_{p^i}^i$ von M in eine i-dimensionale D.-Homologiebasis $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \ldots, \zeta_{\pi^i}^i$ von μ dargestellt; dabei ist $p^i(M) = p^i$, $p^i(\mu) = \pi^i$ gesetzt. Wechsel der Basen geschieht durch unimodulare Substitutionen; die gegenüber unimodularen Substitutionen der Variabelnreihen invarianten Größen einer linearen Substitution sind daher Kreisinvarianten der Abbildungen. Es sind dies der Rang und die Elementarteiler der Substitution. Der geometrische Sinn des Ranges ist klar: diejenigen i-dimensionalen Homologieklassen von μ, die Bilder von Homologieklassen von M sind, bilden eine Untergruppe aller i-dimensionalen Homologieklassen von μ, und der Rang der Substitution ist der Rang dieser Untergruppe. Er heiße der „i-te Rang von f" und werde mit p_f^i bezeichnet; $\sum_i p_f^i = P_f$ heiße der „Gesamtrang von f"; die Elementarteiler mögen die „i-dimensionalen Elementarteiler von f" heißen und mit $c_1^i, c_2^i, \ldots$ bezeichnet werden.

Für $i = 0$ liefern diese Begriffe nichts; denn das Bild eines einfach gezählten Punktes von M ist stets ein einfach zu zählender Punkt von μ; es ist also immer $p_f^0 = 1$, und es gibt immer einen und nur einen 0-dimensionalen Elementarteiler $c^0 = 1$. Die Substitution der n-dimensionalen Zyklen wird, da die Mannigfaltigkeiten M bzw. μ hier Basen sind, durch

$$f(M) \approx c\mu \tag{3}$$

dargestellt; hierin ist $c = c^n$ der *Grad* der Abbildung[10]). Es wird sich zeigen, daß der Grad vor den anderen Elementarteilern wesentlich ausgezeichnet ist.

Diese Invarianten beziehen sich nur auf additive Eigenschaften der Ringabbildungen und haben mit der Produktbildung in den Ringen, also mit den Eigenschaften, die M und μ als Mannigfaltigkeiten vor anderen Komplexen auszeichnen, nichts zu tun. Zweckmäßige Definitionen von Invarianten, die sich auf multiplikative Eigenschaften der Ringe beziehen, liegen viel weniger nahe, und das dürfte seinen Grund in dem Umstand haben, daß die Ringabbildung zwar, wie wir sahen, ein additiver, aber im allgemeinen kein multiplikativer Homomorphismus ist, d. h. daß im allgemeinen *nicht* die D.-Homologie $f(z_1 \cdot z_2) \approx f(z_1) \cdot f(z_2)$ gilt; denn ist z. B. $z_1 = M$ und z_2 ein Punkt, so ist $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_2) \approx \zeta$, wobei ζ ein Punkt in μ ist, aber $f(z_1) \approx c\mu$, also $f(z_1) \cdot f(z_2) \approx c\mu \cdot \zeta \approx c\zeta$; hiernach könnte man vielleicht vermuten, daß immer $f(z_1) \cdot f(z_2) \approx cf(z_1 \cdot z_2)$ sei; daß jedoch dies nicht zutrifft, zeigt das Beispiel einer Abbildung einer Torusfläche auf eine Kugel; bei ihr sind die Bilder zweier geschlossener Kurven, deren Schnitt ein einfacher Punkt ist, homolog 0, also ist auch ihr Schnitt ≈ 0; hier ist also $f(z_1 \cdot z_2) \not\approx 0$, $f(z_1) \cdot f(z_2) \approx 0$, wenn z_1, z_2 die eben genannten Kurven sind. Es ist leicht, an weiteren Flächenabbildungen zu zeigen, daß die Bilder der Schnitte geschlossener Kurven sich sehr verschiedenartig zu dem Schnitte der Bilder der Kurven verhalten können.

Es ist also wünschenswert, Gesetze aufzufinden, die einen Ersatz für den fehlenden multiplikativen Homomorphismus schaffen; es besteht ferner die Aufgabe, festzustellen, ob die oben auf Grund des additiven Homomorphismus definierten numerischen Invarianten voneinander unabhängig sind oder ob Bindungen zwischen ihnen bestehen. Die Sätze, die im folgenden bewiesen werden, sind Beiträge zur Beantwortung dieser Fragen. Das erstrebenswerte Ziel ist, algebraische Abbildungseigenschaften anzugeben, die bei beliebigen Mannigfaltigkeiten M und μ notwendige und hinreichende Bedingungen dafür sind, daß eine vorgegebene Abbildung von $\mathfrak{R}(M)$ auf $\mathfrak{R}(\mu)$ durch eine Abbildung f von M auf μ bewirkt wird. Dieses Ziel wird nicht erreicht, denn alle allgemeinen Sätze, die hier bewiesen werden, haben nur den Charakter notwendiger Bedingungen.

§ 3. Der Umkehrungshomomorphismus einer Abbildung.

Alle unsere Sätze folgen im wesentlichen aus der Tatsache, daß eine gewisse Ringabbildung existiert, die eine Art „Umkehrung" der durch f bewirkten Ringabbildung ist:

Satz I: *Es gibt eine eindeutige Abbildung φ des Ringes $\mathfrak{R}(\mu)$ in den Ring $\mathfrak{R}(M)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

1) *φ ist ein Ringhomomorphismus (d. h. additiver und multiplikativer Homomorphismus)*[11]);

2) *für jedes Element z von $\mathfrak{R}(M)$ und jedes Element ζ von $\mathfrak{R}(\mu)$ gilt*

$$f(\varphi(\zeta) \cdot z) \approx \zeta \cdot f(z).^{11a}) \tag{4}$$

[10]) *L. E. J. Brouwer*, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **71** (1911).

[11]) Dabei braucht nicht jedes Element von $\mathfrak{R}(M)$ Bild eines Elements von $\mathfrak{R}(\mu)$ zu sein.

[11a]) Der Satz ist trivial, wenn man Summe und Produkt nicht im algebraischen Sinne, sondern als Vereinigung und Durchschnitt von Punktmengen in M bezw. μ auffaßt und $\varphi(\zeta)$ als die Menge derjenigen Punkte von M erklärt, die durch f auf Punkte von ζ abgebildet werden.

Dem Beweise, der die Konstruktion von φ enthält, schicken wir einige Folgerungen aus dem Satze voran, die von der Art dieser Konstruktion nicht abhängen und die wir später hauptsächlich benutzen werden:

Satz Ia: *φ ist durch die in Satz I genannten Eigenschaften eindeutig bestimmt. Sind nämlich $z_1^i, z_2^i, \ldots, z_{p^i}^i$ bzw. $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \ldots, \zeta_{\pi^i}^i$ i-dimensionale Basen in $\Re(M)$ bzw. $\Re(\mu)$, $z_1^{n-i}, z_2^{n-i}, \ldots, z_{p^i}^{n-i}$ bzw. $\zeta_1^{n-i}, \zeta_2^{n-i}, \ldots, \zeta_{\pi^i}^{n-i}$ ihre dualen Basen (s. § 1, Schluß), und ist*

$$f(z_r^i) \approx \sum_s a_{rs}^i \zeta_s^i,$$

so ist

$$\varphi(\zeta_s^{n-i}) \approx \sum_r a_{rs}^i z_r^{n-i}.^{11b})$$

Beweis: Es sei

$$\varphi(\zeta_\sigma^{n-i}) \approx \sum_\varrho \alpha_{\sigma\varrho}^{n-i} z_\varrho^{n-i};$$

dann folgt

$$\varphi(\zeta_\sigma^{n-i}) \cdot z_r^i \approx \sum_\varrho \alpha_{\sigma\varrho}^{n-i} z_\varrho^{n-i} \cdot z_r^i \approx \alpha_{\sigma r}^{n-i} z^0,$$

worin z^0 die durch einen einfachen Punkt bestimmte Homologieklasse von $\Re(M)$ ist, und, wenn ζ^0 die analoge Bedeutung in $\Re(\mu)$ hat,

$$f(\varphi(\zeta_\sigma^{n-i}) \cdot z_r^i) \approx \alpha_{\sigma r}^{n-i} \zeta^0.$$

Andererseits ist

$$\zeta_\sigma^{n-i} \cdot f(z_r^i) \approx \sum_s a_{rs}^i \zeta_\sigma^{n-i} \cdot \zeta_s^i \approx a_{r\sigma}^i \zeta^0,$$

also nach (4)

$$\alpha_{\sigma r}^{n-i} = a_{r\sigma}^i.$$

Satz Ib: *Für jedes Element ζ von $\Re(\mu)$ ist*

$$f(\varphi(\zeta)) \approx c\,\zeta, \tag{5}$$

wobei c der Grad von f ist.

Der **Beweis** ergibt sich unmittelbar aus (2), (3) und (4), wenn man in (4) $z = M$ setzt.

Satz Ic: *Wenn f eineindeutig ist, so ist φ die durch f^{-1} bewirkte Ringabbildung.*

Beweis: Wegen der Eineindeutigkeit ist die Ringabbildung f^{-1} ein Ringisomorphismus; denn diese Tatsache ist mit der topologischen Invarianz des Ringes (§ 1) gleichbedeutend. Ebenso folgt aus der Eineindeutigkeit von f

$$f(f^{-1}(\zeta) \cdot z) \approx f f^{-1}(\zeta) \cdot f(z) \approx \zeta \cdot f(z).$$

Die Ringabbildung f^{-1} hat also die in Satz I von φ ausgesagten Eigenschaften und ist daher nach Satz I a mit φ identisch.

Beweis von Satz I: Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $M \times \mu$ und setzen die einfachsten Eigenschaften der Produktmannigfaltigkeiten als bekannt voraus [12]); die Bezeichnungen sind dieselben wie bei Lefschetz; nur soll die Bildung des Schnittes in $M \times \mu$ zur besseren Unterscheidung von den Schnittbildungen in M und μ nicht durch einen Punkt, sondern durch einen kleinen Kreis angedeutet werden. Wir nennen zunächst einige einfache Tatsachen, die wir brauchen werden:

[11b]) Als additiver Homomorphismus ist φ hierdurch vollständig bestimmt. Die multiplikativ-homomorphe Eigenschaft ist für den Satz I a ohne Bedeutung.

[12]) S. z. B. Teil II der in Fußn. 1 genannten Arbeit (a) von Lefschetz; wir brauchen aber nur die einfachsten Tatsachen und z. B. nicht die Bildung der Homologiebasen in dem Produktkomplex.

1) In $M \times \mu$ ist durch die Orientierungen von M und μ eine Orientierung ausgezeichnet. Sind $t, \bar{t}$ bzw. $\tau, \bar{\tau}$ Zellenpaare aus „dualen" Zelleinteilungen von M bzw. μ, so ist die Gleichung

$$(t \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = \pm (t \cdot \bar{t} \times \tau \,.\, \bar{\tau})$$

bis auf das Vorzeichen selbstverständlich; die Orientierungsfestsetzungen liefern, wenn t a-dimensional, $\bar{\tau}$ $\bar{\alpha}$-dimensional ist,

$$(t \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = (-1)^{(n-a)(n-\bar{\alpha})} (t \cdot \bar{t} \times \tau \cdot \bar{\tau}) \quad [12a]),$$

also insbesondere, wenn $t = t^n$ n-dimensional ist,

$$(t^n \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = t^n \cdot \bar{t} \times \tau \cdot \bar{\tau}.$$

Hieraus folgt durch Summation über alle n-dimensionalen Zellen t^n von M

$$(M \times \tau) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = \bar{t} \times \tau \cdot \bar{\tau},$$

und wenn π ein i-dimensionaler polyedraler Zyklus in μ ist, durch Summation über dessen i-dimensionalen Zellen τ

$$(6) \qquad (M \times \pi) \circ (\bar{t} \times \bar{\tau}) = \bar{t} \times \pi \cdot \bar{\tau}.$$

Sind ζ_1, ζ_2 zwei beliebige Zyklen in μ, so liefern polyedrale Approximationen und nochmalige Summierungen

$$(7\,a) \qquad (M \times \zeta_1) \circ (M \times \zeta_2) \approx M \times \zeta_1 \cdot \zeta_2.$$

Ferner ist

$$(7\,b) \qquad (M \times \zeta_1) + (M \times \zeta_2) \approx M \times (\zeta_1 + \zeta_2).$$

2) Jeder Punkt von $M \times \mu$ ist in eindeutiger Weise durch $x \times \xi$ zu bezeichnen, wobei x, ξ Punkte von M bzw. μ sind. Ordnet man dem Punkt $x \times \xi$ den Punkt ξ zu, so ist das eine eindeutige und stetige Abbildung von $M \times \mu$ auf μ, die wir mit F bezeichnen. Sind wieder t, τ Zellen von M bzw. μ, so ist

$$(8) \qquad F(t \times \tau) = \tau.$$

3) Sind $t_1^i, t_2^i, \ldots$ bzw. $\tau_1^j, \tau_2^j, \ldots$ $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ die Zellen von Zerlegungen von M und μ, so gibt es eine Zelleneinteilung von $M \times \mu$, deren Zellen die Produkte $t_r^i \times \tau_s^j$ sind. Folglich ist jeder Zyklus in $M \times \mu$ einer linearen Verbindung der $t_r^i \times \tau_s^j$ d.-homolog.

4) Wir brauchen noch folgende Bemerkung, die sich nicht nur auf Produktmannigfaltigkeiten bezieht: $\overline{M}$ sei eine in einer Mannigfaltigkeit N gelegene Mannigfaltigkeit, Z_1 ein Zyklus in N, Z_2 ein Zyklus in $\overline{M}$. Die Schnittbildung in $\overline{M}$ bezeichnen wir durch einen Punkt, die in N durch einen Kreis. Dann ist klar, daß die Schnitte $(Z_1 \circ \overline{M}) \cdot Z_2$ und $Z_1 \circ Z_2$ sich höchstens um das Vorzeichen unterscheiden; es gilt aber der Satz [13]), daß auch die Vorzeichen übereinstimmen, daß also

$$(9) \qquad (Z_1 \circ M) \cdot Z_2 = Z_1 \circ Z_2$$

ist. Wenden wir dies an auf $N = M \times \mu$, $Z_1 = M \times \zeta_1$, $Z_2 = (M \times \zeta_2) \circ \overline{M}$, wobei ζ_1, ζ_2 Zyklen in μ, Z_1, Z_2 also Zyklen in $M \times \mu$ sind, so ergibt sich unter Verwendung des assoziativen Gesetzes

$$((M \times \zeta_1) \circ \overline{M}) \cdot ((M \times \zeta_2) \circ \overline{M}) = (M \times \zeta_1) \circ (M \times \zeta_2) \circ \overline{M},$$

[12a]) Lefschetz (a), S. 35, Nr. 55; die dort unterdrückte Vorzeichenbetrachtung läßt sich auf Grund von (a), Nr. 53, leicht durchführen.

[13]) Lefschetz (b), Nr. 1.

also nach (7 a)

$$(10) \qquad ((M \times \zeta_1) \circ \overline{M}) \cdot ((M \times \zeta_2) \circ \overline{M}) \approx (M \times \zeta_1 \cdot \zeta_2) \circ \overline{M}.$$

Wir gehen zum Beweis von Satz I über. Die Punkte $x \times f(x)$ bilden, wenn x alle Punkte von M durchläuft, ein eineindeutiges Bild $\overline{M}$ von M. Wir fassen f als Abbildung von $\overline{M}$ auf μ auf; dann ist

$$f(x) = F(x \times f(x)).$$

Wir setzen nun für jeden Zyklus ζ aus μ

$$\varphi(\zeta) \approx (M \times \zeta) \circ \overline{M}.$$

Aus dieser Konstruktion ist die Tatsache ersichtlich, daß φ die Rolle einer „Umkehrung" von f spielt. Wir haben zu zeigen, daß φ ein Ringhomomorphismus ist und (4) erfüllt.

Aus (7 b) folgt durch rechtsseitiges Schneiden mit $\overline{M}$, daß φ ein additiver, aus (10), daß φ ein multiplikativer Homomorphismus ist.

Nach (9) ist, wenn $\bar{z}$ ein Zyklus in $\overline{M}$ ist,

$$\varphi(\zeta) \cdot \bar{z} = ((M \times \zeta) \circ \overline{M}) \cdot \bar{z} = (M \times \zeta) \circ \bar{z};$$

die Behauptung (4) läßt sich daher schreiben:

$$(4') \qquad F((M \times \zeta) \circ \bar{z}) \approx \zeta \cdot F(\bar{z}).$$

Ist z' ein Zyklus in $M \times \mu$, so daß

$$z' \approx \bar{z} \quad \text{in} \quad M \times \mu$$

ist, so folgt, da Zyklen, die in $M \times \mu$ d.-homolog sind, durch F auf Zyklen abgebildet werden, die in μ d.-homolog sind, die Behauptung (4′) aus

$$(4'') \qquad F((M \times \zeta) \circ z') = \zeta \cdot F(z'),$$

wo wir auch ζ als aus Zellen einer Zerlegung von μ bestehend annehmen; (4″) ist also für einen geeigneten z' zu beweisen.

$t_1^i, t_2^i, \ldots$, und $\tau_1^j, \tau_2^j, \ldots$ $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ seien die Zellen von Zerlegungen von M und μ. Wir können z' so wählen, daß

$$(11) \qquad z' = \sum_{r,s} u_{rs}(t_r \times \tau_s)$$

ist; dann folgt aus (9) durch Summierung über r und s

$$(12) \qquad F(z') = \sum_{r,s} u_{rs}\, \tau_s.$$

Nach (6) und (11) ist

$$(11') \qquad (M \times \zeta) \circ z' = \sum_{r,s} u_{rs}\, (t_r \times \zeta \cdot \tau_s);$$

ζ darf man als zu den τ_s in allgemeiner Lage befindlich annehmen; dann ist $\zeta \cdot \tau_s$ eine Zelle; aus (11′) und (8) folgt durch Summierung

$$F((M \times \zeta) \circ z') = \sum_{r,s} u_{rs}\, \zeta \cdot \tau_s = \zeta \cdot \sum_{r,s} u_{rs}\, \tau_s,$$

also nach (12) die Behauptung (4″).

§ 4. Sätze über algebraische Eigenschaften einer Abbildung.

Die Sätze dieses Paragraphen sind rein algebraische Folgerungen aus der Tatsache, daß es eine ringhomomorphe Abbildung φ des Ringes $\mathfrak{R}(M)$ in den Ring $\mathfrak{R}(\mu)$ gibt, die die Eigenschaften I a und I b besitzt. Weitere Eigenschaften von φ werden nicht herangezogen, Gleichung (4) wird also nicht voll ausgenutzt. c ist immer der Grad

von f, und es gelten überhaupt die im § 2 eingeführten Bezeichnungen. Es bedeute ferner $\mathfrak{N}_f$ die additive Untergruppe von $\mathfrak{R}(M)$, die aus denjenigen Elementen besteht, deren f-Bilder ≈ 0 sind.

Satz II: *Ist $c \neq 0$, so hat f folgende Eigenschaften:*

1) *jeder c-fache Zyklus $c\zeta$ aus μ ist dem Bild eines Zyklus aus M d.-homolog;*

2) *die (additive) Gruppe derjenigen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$, deren Bilder c-fache Elemente*[14] *von $\mathfrak{R}(\mu)$ sind, — die also alle c-fachen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$ als Untergruppe enthält —, ist die direkte Summe der Gruppe $\mathfrak{N}_f$ und eines mit $\mathfrak{R}(\mu)$ dimensionstreu-isomorphen Ringes $\mathfrak{R}_f$;*

3) *der eben genannte Isomorphismus wird durch Ausübung der Abbildung $\frac{1}{c} f$ auf die Elemente von $\mathfrak{R}_f$ vermittelt; für je zwei Elemente z_1, z_2 von $\mathfrak{R}_f$ gilt also*

$$\frac{1}{c} f(z_1) \cdot \frac{1}{c} f(z_2) \approx \frac{1}{c} f(z_1 \cdot z_2)$$

oder, was dasselbe ist,

$$f(z_1) \cdot f(z_2) \approx c f(z_1 \cdot z_2). \tag{13}$$

Beweis: 1) Nach I b ist $c\zeta \approx f(\varphi(\zeta))$.

2) Der Homomorphismus φ ist eineindeutig; denn aus

$$\varphi(\zeta_1) \approx \varphi(\zeta_2)$$

folgt nach I b

$$c\zeta_1 \approx c\zeta_2,$$

also

$$\zeta_1 \approx \zeta_2.$$

Die Gesamtheit aller Elemente $\varphi(\zeta)$ ist also ein zu $\mathfrak{R}(\mu)$ dimensionstreu-isomorpher Unterring $\mathfrak{R}_f$ von $\mathfrak{R}(M)$. Ist

$$f(z) \approx c\zeta, \tag{14}$$

so ist nach I b

$$f(z - \varphi(\zeta)) \approx 0,$$

also

$$z \approx y + \varphi(\zeta),$$

wobei

$$y < \mathfrak{N}_f$$

ist. Mithin ist jedes z, das (14) erfüllt, Summe eines Elements aus $\mathfrak{N}_f$ und eines Elements aus $\mathfrak{R}_f$. Diese Summendarstellung ist eindeutig bestimmt; denn aus

$$y_1 + \varphi(\zeta_1) \approx y_2 + \varphi(\zeta_2)$$

mit $y_1, y_2 < \mathfrak{N}_f$ folgt

$$y_2 - y_1 \approx \varphi(\zeta_1 - \zeta_2),$$

also nach I b

$$0 \approx c(\zeta_1 - \zeta_2)$$

und daher

$$\zeta_1 \approx \zeta_2$$

---

[14]) Ein Element A heißt c-fach, wenn es ein Element B gibt, so daß $A \approx cB$ ist.

sowie

$$y_1 \approx y_2.$$

Diese eindeutige Darstellbarkeit jedes Elements z, das (14) erfüllt, als Summe besagt, daß die Gesamtheit dieser Elemente die direkte Summe von $\mathfrak{N}_f$ und $\mathfrak{R}_f$ ist.

3. Sind z, ζ einander entsprechende Elemente von $\mathfrak{R}_f$ bzw. $\mathfrak{R}(\mu)$, so ist $z \approx \varphi(\zeta)$, also nach Ib: $f(z) \approx c\zeta$, $\zeta \approx \frac{1}{c} f(z)$.

Satz IIa: *Ist* $c \neq 0$, *so ist*

$$p_f^i = p^i(\mu) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

und mithin

$$P_f = P(\mu).$$

(Die Bezeichnungen sind in den §§ 1, 2 erklärt.)

Beweis: Die Gruppe der c-fachen, i-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}(\mu)$ hat den Rang $p^i(\mu)$; nach Satz II, 1 sind alle diese Elemente Bilder. Folglich ist $p_f^i \geqq p^i(\mu)$, und da nach Definition von p_f^i immer $p_f^i \leqq p^i(\mu)$ ist, gilt die Behauptung.

Satz IIb: *Ist* $c = \pm 1$, *so ist* $\mathfrak{R}(M)$ *die direkte Summe der Gruppe* $\mathfrak{N}_f$ *und des mit* $\mathfrak{R}(\mu)$ *dimensionstreu-isomorphen Ringes* $\mathfrak{R}_f$.

Der **Beweis** ist in II, 2 enthalten.

Satz IIc: *Ist für jedes* i $p^i(M) = p^i(\mu)$, — *ist also z. B.* $M = \mu$, — *und* $c \neq 0$, *so ist für je zwei Zyklen* z_1, z_2

$$f(z_1) \cdot f(z_2) \approx c f(z_1 \cdot z_2).$$

Beweis: Da die i-dimensionalen Elemente z, die (14) erfüllen, stets den Rang $p^i(M)$ und die i-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}_f$ nach II, 2 stets den Rang $p^i(\mu)$ haben, haben die i-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{N}_f$ nach II, 2 stets den Rang $p^i(M) - p^i(\mu)$, in unserem Fall also den Rang 0, d. h. $\mathfrak{N}_f$ besteht nur aus dem Nullelement. Da nach II, 2 stets $cz \prec \mathfrak{N}_f + \mathfrak{R}_f$ ist, ist also unter unseren Voraussetzungen $cz \prec \mathfrak{R}_f$ für jedes Element z. Folglich ist nach II, 3 für zwei beliebige Elemente z_1, z_2

$$c^2 f(z_1) \cdot f(z_2) \approx c^3 f(z_1 \cdot z_2),$$

woraus die Behauptung folgt.

Aus diesem Satz und aus II, 1 folgt unmittelbar:

Satz IId: *Ist unter den Voraussetzungen von* IIc *noch* $c = 1$, *so ist die Ringabbildung* f *ein dimensionstreuer Isomorphismus zwischen* $\mathfrak{R}(M)$ *und* $\mathfrak{R}(\mu)$. *Also bewirkt* f, *wenn sie* M *auf sich mit* $c = 1$ *abbildet, einen dimensionstreuen Automorphismus von* $\mathfrak{R}(M)$.

In Satz II, 2 ist enthalten

Satz III: *Eine notwendige Bedingung für die Abbildbarkeit mit von* 0 *verschiedenem Grade von* M *auf* μ *ist die Existenz eines zu* $\mathfrak{R}(\mu)$ *dimensionstreu-isomorphen Unterrings von* $\mathfrak{R}(M)$.

Dieser Satz enthält den schwächeren

Satz IIIa: *Notwendige Bedingungen für die eben genannte Abbildbarkeit sind die Ungleichungen*

$$p^i(M) \geqq p^i(\mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Hieraus ergibt sich die folgende Verallgemeinerung des Satzes von der topologischen Invarianz der Bettischen Zahlen:

Satz IIIb: *Zwei Mannigfaltigkeiten, von denen man jede auf die andere mit einem von 0 verschiedenen Grade abbilden kann, haben für jede Dimension gleiche Bettische Zahlen.*

Ebenso ergibt sich aus II d eine Verallgemeinerung des Satzes von der topologischen Invarianz des Ringes einer Mannigfaltigkeit:

Satz IIIc: *Haben M und μ in jeder Dimension gleiche Bettische Zahlen, und kann man M auf μ mit dem Grade 1 abbilden, so sind die beiden Ringe dimensionstreu-isomorph.*

Nach Satz II a gibt es $p^i(\mu)$ i-dimensionale Elementarteiler (s. § 2) von f; sie seien — in ihrer natürlichen Reihenfolge — $c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{p^i(\mu)}^i$. Unter den Voraussetzungen von Satz II c besteht zwischen den i-dimensionalen und den $(n-i)$-dimensionalen Elementarteilern eine gewisse Dualität:

Satz IV: *Haben M und μ in jeder Dimension gleiche Bettische Zahlen p^i, — ist also z. B. $M = \mu$, — und ist $c \neq 0$, so ist*

$$c_r^i \cdot c_{p^i-r+1}^{n-i} = |c| \qquad (i = 0, 1, \ldots, n;\ r = 1, 2, \ldots, p^i).$$

Beweis: Man kann i-dimensionale Basen $z_1^i, z_2^i, \ldots, z_{p^i}^i$ und $\zeta_1^i, \zeta_2^i, \ldots, \zeta_{p^i}^i$ in M und μ so wählen, daß

$$f(z_r^i) \approx c_r^i \zeta_r^i \qquad (r = 1, 2, \ldots, p^i)$$

ist. Ihre dualen Basen seien $z_1^{n-i}, z_2^{n-i}, \ldots, z_{p^i}^{n-i}$ bzw. $\zeta_1^{n-i}, \zeta_2^{n-i}, \ldots, \zeta_{p^i}^{n-i}$; dann ist nach I a

$$\varphi(\zeta_r^{n-i}) \approx c_r^i z_r^{n-i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, p^i). \tag{15}$$

Es sei

$$f(z_r^{n-i}) \approx \sum_s a_{rs} \zeta_s^{n-i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, p^i); \tag{16}$$

wendet man f auf (15) an, so ergibt sich nach II b und (16)

$$c\, \zeta_r^{n-i} \approx c_r^i \sum_s a_{rs} \zeta_s^{n-i},$$

also ist $a_{rs} = 0$ für $r \neq s$ und $c = c_r^i a_{rr}$, d. h. (16) hat die Gestalt

$$f(z_r^{n-i}) \approx \frac{c}{c_r^i} \zeta_r^{n-i} \qquad (r = 1, 2, \ldots, p^i). \tag{16'}$$

Da c_r^i Teiler von c_{r+1}^i ist, ist $\frac{c}{c_{r+1}^i}$ Teiler von $\frac{c}{c_r^i}$. Schreibt man die Gleichungen (16') in der umgekehrten Reihenfolge auf als bisher, also zuerst die Gleichung mit $r = p^i$, zuletzt die mit $r = 1$, so hat man die $(n-i)$-dimensionale f-Substitution durch Einführung neuer Basen auf eine Diagonalform gebracht, in der jedes Element durch das vorhergehende teilbar ist; dann sind aber die Elemente der Substitutionsmatrix bis auf das Vorzeichen die Elementarteiler der Substitution. Es ist also

$$c_{p^i-r+1}^{n-i} = \left| \frac{c}{c_r^i} \right|, \quad c_r^i \cdot c_{p^i-r+1}^{n-i} = |c|.$$

Der folgende Satz ist ein Gegenstück zu dem Satz II a:

Satz V: *Ist $c = 0$, so ist*

$$p_f^i + p_f^{n-i} \leqq p^i(M) = \frac{p^i(M) + p^{n-i}(M)}{2} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

und mithin

$$P_f \leqq \frac{1}{2} P(M).$$

Beweis: $\mathfrak{N}_f^i$ sei die (additive) Gruppe derjenigen i-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$, deren Bilder ≈ 0 sind. Ist $\mathfrak{B}^i$ die Gruppe aller i-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{R}(M)$, so wird die Gruppe der Restklassen (Faktorgruppe) von $\mathfrak{N}_f^i$ in $\mathfrak{B}^i$ isomorph auf die Gruppe der i-dimensionalen Bilder in $\mathfrak{R}(\mu)$ abgebildet. Folglich hat die Restklassengruppe den Rang p_f^i, und da der Rang einer Untergruppe stets gleich dem Rang der ganzen Gruppe, vermindert um den Rang der Restklassengruppe ist, hat $\mathfrak{N}_f^i$ den Rang $p^i(M) - p_f^i$. Andererseits sind infolge I b und $c = 0$ alle Elemente $\varphi(\zeta^i)$ in $\mathfrak{N}_f^i$ enthalten, der Rang von $\mathfrak{N}^i$ ist also mindestens gleich dem Rang der i-dimensionalen φ-Substitution; der letztgenannte Rang ist nach I a gleich dem Rang der $(n-i)$-dimensionalen f-Substitution, also gleich p_f^{n-i}. Folglich ist $p^i(M) - p_f^i \geqq p_f^{n-i}$, w. z. b. w.

Für den Fall $M = \mu$ und seine mehrfach herangezogene Verallgemeinerung seien die Sätze II a und V noch einmal gegenübergestellt:

Satz Va: *Haben M und μ in jeder Dimension gleiche Bettische Zahlen, ist also z. B. $M = \mu$, so ist entweder*

$$c \neq 0, \qquad p_f^i = p^i(M) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \quad P_f = P(M)$$

oder

$$c = 0, \; p_f^i + p_f^{n-i} \leqq p^i(M) = \frac{p^i(M) + p^{n-i}(M)}{2} \; (i = 0, 1, \ldots, n), \quad P_f \leqq \frac{1}{2} P(M).$$

§ 5. Beispiel: die komplexen projektiven Räume.

In diesem Paragraphen sind obere Indizes immer Exponenten, nicht Dimensionszahlen.

K_n sei die Gesamtheit der komplexen Punkte des n-dimensionalen projektiven Raumes, d. h. aller Verhältnisse komplexer Zahlen $z_0 : z_1 : \cdots : z_n$ unter Ausschluß des Verhältnisses $0 : 0 : \cdots : 0$. Man zeigt leicht, daß K_n eine $2n$-dimensionale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit ist; die Orientierbarkeit folgt z. B. daraus, daß K_n aus dem $2n$-dimensionalen euklidischen Raum R_{2n} durch Hinzufügung eines K_{n-1} entsteht und eine Orientierung des R_{2n} durch Hinzufügung eines $(2n-2)$-dimensionalen Gebildes nicht zerstört wird.

Durch das Gleichungssystem

$$z_{m+1} = z_{m+2} = \cdots = z_n = 0$$

wird in K_n ein K_m ausgezeichnet, den wir kurz mit K_m bezeichnen. Wir behaupten, daß K_m eine vollständige $2m$-dimensionale Homologiebasis bildet (d. h. daß $K_m \not\sim 0$ und daß jeder $2m$-dimensionale Zyklus einem Vielfachen von K_m homolog ist), und daß es Homologiebasen ungerader Dimension nicht gibt (d. h. daß jeder Zyklus ungerader Dimension ~ 0 ist).

Für $n = 0$, also für einen Punkt K_0, ist die Behauptung richtig; wir nehmen sie für K_{n-1} als bewiesen an. Ist dann Z ein höchstens $(2n-1)$-dimensionaler Zyklus in K_n, so dürfen wir annehmen, daß der Punkt $0 : \cdots : 0 : 1$ nicht auf Z liegt. Dann ist, wenn $z_0 : \cdots : z_{n-1} : z_n$ irgendein Punkt von Z ist, $z_0 : \cdots : z_{n-1} : tz_n$ für jeden Wert von t ein Punkt in K_n. Wir deformieren Z, indem wir den eben eingeführten Parameter t von 1 bis 0 laufen lassen, in einen zu Z homologen, in K_{n-1} gelegenen Zyklus $\bar{Z}$. Hat Z ungerade Dimension, so ist nach Annahme $\bar{Z} \sim 0$ in K_{n-1}, also $Z \sim \bar{Z} \sim 0$ in K_n. Hat Z die Dimension $2m$, so ist nach Annahme $\bar{Z} \sim aK_m$ in K_{n-1}, also $Z \sim \bar{Z} \sim aK_m$ in K_n; wir haben noch zu zeigen daß $K_m \not\sim 0$ in K_n ist. Wäre $K_m \sim 0$ in K_n, so gäbe es einen von K_m berandeten

$(2m+1)$-dimensionalen Komplex Y in K_n, von dem wir wieder annehmen dürften, daß der Punkt $0:\cdots:0:1$ nicht auf ihm liegt. Wir könnten ihn durch das schon oben angewandte Verfahren in einen Komplex $\overline{Y}$ in K_{n-1} deformieren; dabei würde an dem Rand K_m von Y nichts geändert, K_m würde also $\overline{Y}$ in K_{n-1} beranden, im Widerspruch zu der über K_{n-1} gemachten Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen; die Bettischen Zahlen von K_n sind also 1 für die geraden, 0 für die ungeraden Dimensionszahlen. Torsionskoeffizienten sind nicht vorhanden, Homologien und D.-Homologien sind daher miteinander identisch.

K_{n-1} hatten wir durch die Gleichung $z_n = 0$ definiert; ist $\overline{K}_{n-1}$ das durch $z_{n-1} = 0$ definierte Gebilde, so ist K_{n-2} der Schnitt[15]) von K_{n-1} und $\overline{K}_{n-1}$; ferner sind K_{n-1} und $\overline{K}_{n-1}$ einander homolog, da sie sich eineindeutig ineinander deformieren lassen; dabei haben wir die Vorzeichen vernachlässigt. Jedenfalls ist

$$K_{n-2} \sim \pm K_{n-1}^2.$$

Allgemein ist, da jeder durch eine Gleichung $z_i = 0$ definierte Zyklus bis auf das Vorzeichen zu K_{n-1} homolog und K_m der Schnitt von $n-m$ dieser Zyklen ist,

$$K_m \sim \pm K_{n-1}^{n-m}.$$

Die Potenzen von $X = K_{n-1}$ bilden also eine Basis des Homologieringes von K_n; dabei sind aber von der $(n+1)$-ten Potenz an alle Potenzen gleich 0 zu setzen, da die entsprechenden Schnitte nicht mehr existieren. *Der Ring von K_n ist isomorph dem Ring der ganzzahligen Polynome einer Variabeln X, die die Gleichung $X^{n+1} = 0$ erfüllt.*

Wir betrachten nun eine Abbildung f von K_n auf eine mit K_n homöomorphe Mannigfaltigkeit $\varkappa_n$, die auch mit K_n identisch sein darf. Die den K_m analogen Basiselemente in $\varkappa_n$ bezeichnen wir mit $\varkappa_m$, und setzen $\varkappa_{n-1} = \xi$, so daß also bei geeigneter Orientierung der K_m und $\varkappa_m$

$$K_m \sim X^{n-m}, \quad \varkappa_m \sim \xi^{n-m} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n) \tag{17}$$

wird, wobei $K_0 \sim X^n$, $\varkappa_0 \sim \xi^n$ Punkte sind. Es sei

$$f(K_m) \sim u_m \varkappa_m; \tag{18}$$

dann ist nach Satz I a, da K_{n-m} zu $\pm K_m$, $\varkappa_{n-m}$ zu $\pm \varkappa_m$ dual ist,

$$\varphi(\varkappa_{n-m}) \sim u_m K_{n-m}, \tag{19}$$

also nach (17) insbesondere

$$\varphi(\xi) \sim u_1 X.$$

Hieraus folgt, da φ ein multiplikativer Homomorphismus ist,

$$\varphi(\xi^l) \sim u_1^l X^l, \text{ [16])}$$

also nach (17), wenn wir $u_1 = u$ setzen,

$$\varphi(\varkappa_{n-m}) \sim u^m K_{n-m}$$

und nach I a

$$f(K_m) \sim u^m \varkappa_m, \quad \text{d. h.} \quad u_m = u^m \qquad (m = 0, 1, \ldots, n). \text{ [16])} \tag{20}$$

Die Gleichungen (20) sind notwendige Bedingungen für f; die Gleichung mit $m = n$ besagt, daß der Grad von f eine n-te Potenz sein muß. Es bleibt noch die Frage zu be-

[15]) Man hat hier und im folgenden streng genommen noch zu zeigen, daß die sich schneidenden Zyklen als Polyeder aufgefaßt werden können, die sich zueinander in allgemeiner Lage befinden; dieser Nachweis stößt auf keine Schwierigkeit. — Hierzu vergl. man: *B. L. van der Waerden*, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Annalen **102** (1929), wo im „Anhang II" speziell K_n betrachtet wird.

[16]) Hier ist immer $u^0 = 1$ zu setzen, auch dann, wenn $u = 0$ ist.

antworten, ob es zu jedem u eine Abbildung f gibt. Diese Frage ist (für $n \geqq 1$) zu bejahen. Denn ist $\varkappa_n$ die Gesamtheit der Verhältnisse $\zeta_0 : \zeta_1 : \cdots : \zeta_n$, so liefert für $u \geqq 0$ die Abbildung

$$\zeta_i = z_i^u \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{21 a}$$

für $u \leqq 0$ die Abbildung

$$\zeta_i = \bar{z}_i^u \qquad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{21 b}$$

wobei $\bar{z}_i$ die zu z_i konjugiert komplexe Zahl ist, je ein Beispiel der gewünschten Art. Denn in jedem Fall wird der — mit einer Kugelfläche homöomorphe — Zyklus K_1, der durch $z_2 = \cdots = z_n = 0$ definiert ist, auf die entsprechende Fläche in $\varkappa_n$ mit dem Grade u abgebildet, und dies bedeutet $f(K_1) \sim u\varkappa_1$.

Wir fassen zusammen:

Satz VI: *Die Kreise der Abbildungen des komplexen projektiven Raumes K_n auf einen gleichdimensionalen komplexen projektiven Raum lassen sich vollständig aufzählen: sie werden durch die Abbildungen repräsentiert, die durch die Gleichungen* (21 a), (21 b) *gegeben sind. Als Abbildungsgrade treten nur n-te Potenzen auf.*

Auf Grund der Kenntnis dieser Abbildungskreise können wir einen Fixpunktsatz aussprechen, der bekannte Eigenschaften der reellen projektiven Räume ins Komplexe überträgt:

Satz VII: *Ist n gerade, so hat jede Abbildung von K_n auf sich einen Fixpunkt. Ist n ungerade, so ist der einzige Kreis, der fixpunktfreie Abbildungen enthält, der vom Grade -1, in dem also $f(K_m) \sim (-1)^m K_m$ $(m = 0, 1, \ldots, n)$ ist. Eine fixpunktfreie Abbildung ist z. B.*

$$f(z_{2i}) = \bar{z}_{2i+1}, \quad f(z_{2i+1}) = -\bar{z}_{2i} \qquad \left(i = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}\right).$$

Beweis: Nach der Lefschetzschen Fixpunktformel[1]) und nach (20) hat die Summe der Indizes der Fixpunkte den Wert $\sum_{m=0}^{n} u^m$; diese Zahl ist dann und nur dann gleich 0, wenn n ungerade und $u = -1$ ist. — Daß die in dem Satz angegebene Abbildung fixpunktfrei ist, ist daraus ersichtlich, daß für einen Fixpunkt $f(z_{2i}) : f(z_{2i+1}) = z_{2i} : z_{2i+1}$, also $|z_{2i}|^2 + |z_{2i+1}|^2 = 0$ für $i = 0, 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, also $z_j = 0$ für alle j sein müßte, was unmöglich ist.

§ 6. Der Index und weitere algebraische Eigenschaften einer Abbildung.

In diesem Paragraphen wird die durch f zwischen den Fundamentalgruppen von M und μ hergestellte Beziehung in unsere Untersuchungen einbezogen; ein Teil der sich dabei ergebenden Sätze — nämlich die Sätze VIII a, X a, X b — läßt sich aber ebenso wie die oben im § 4 bewiesenen Sätze so aussprechen, daß nur von Homologiebegriffen die Rede ist.

Es sei zunächst kurz über einige Tatsachen berichtet, die an anderer Stelle[17]) ausführlich dargestellt worden sind.

Zwei durch einen Punkt gehende geschlossene Wege heißen „äquivalent", wenn man sie unter Festhaltung des Punktes ineinander deformieren kann; die zu einem Punkt gehörigen Äquivalenzklassen repräsentieren die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit.

---

[17]) In der in Fußn. 2 genannten Arbeit des Verfassers, §§ 1—3. Die im obigen Text formulierten Sätze (A), (B), (C) sind die Sätze I, VII, VII a der zitierten Arbeit.

Denjenigen unter den zu einem Punkt $\xi = f(x)$ gehörigen Äquivalenzklassen, die Bilder geschlossener Wege durch den Punkt x von M enthalten, entspricht eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Fundamentalgruppe Φ von μ; $\mathfrak{U}$ ist bis auf innere Automorphismen von Φ eindeutig bestimmt und von x unabhängig; der Index j von $\mathfrak{U}$ in Φ heißt der „Index von f". Die Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* von μ, die man erhält, wenn man unter den Wegen durch ξ nur diejenigen als geschlossen betrachtet, die zu $\mathfrak{U}$ gehören, hat j Blätter; die durch die Überlagerung gegebene Abbildung von μ^* auf μ heiße ψ[18]). Man beweist leicht:

(A) *Es gibt eine Abbildung f^* von M auf μ^*, die den Index $j^* = 1$ hat, so daß für jeden Punkt y von M $f(y) = \psi f^*(y)$ ist.*

Wenn $j = \infty$ ist, so ist μ^* offen und f^* hat den Grad 0; dann hat nach (A) auch f den Grad 0, also gilt:

(B) *Ist $c \neq 0$, so ist j endlich.*

Ferner folgt nach der Produktregel für die Grade, nach der diese bei Zusammensetzung von Abbildungen sich multiplizieren:

(C) *Ist $c \neq 0$, so ist j ein Teiler von c, und zwar ist $c = c^* j$, wenn c^* der Grad von f^* ist.*

Dies sind die Tatsachen, die wir brauchen werden. (B) ist ein Analogon zu Satz II a; denn die in diesem ausgesagte Gleichung $p_j^i = p^i(\mu)$ bedeutet, daß die Gruppe derjenigen i-dimensionalen Homologieklassen, die Bilder i-dimensionaler Homologieklassen von M sind, eine Untergruppe mit endlichem Index in der Gruppe aller i-dimensionalen Homologieklassen von μ bilden. Dieser Index ist das Produkt der i-dimensionalen Elementarteiler von f.

Der Zusammenhang zwischen dem Index j und den früher behandelten Begriffen wird durch den folgenden Satz vermittelt:

Satz VIII: *Ist j endlich — also z. B. $c \neq 0$ —, so ist $p_j^1 = p^1(\mu)$ und das Produkt der 1-dimensionalen Elementarteiler ein Teiler von j.*

Beweis: Die Zusammensetzung zweier Wege, also die gruppenbildende Operation der Fundamentalgruppe, wird im folgenden ebenso wie die Zusammensetzung bei Homologien als Addition bezeichnet. Wir fassen die Äquivalenzklassen der geschlossenen Wege durch den Punkt $\xi = f(x)$ dadurch in „A-Klassen" zusammen, daß wir bestimmen: zwei Äquivalenzklassen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ gehören dann und nur dann zu derselben A-Klasse, wenn die Äquivalenzklasse $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2$ das Bild eines geschlossenen Weges durch x enthält. Nach Definition von j ist j die Anzahl der A-Klassen. Faßt man die Äquivalenzklassen nicht als Gruppenelemente, sondern als Mengen der in ihnen enthaltenen Wege auf, so liegt eine Einteilung aller geschlossenen Wege durch ξ in j A-Klassen durch die Bestimmung vor, daß zwei Wege C_1, C_2 dann und nur dann zu derselben A-Klasse gehören, wenn $C_1 - C_2$ dem Bilde eines geschlossenen Weges durch x äquivalent ist. Bezeichnet man die Gruppe der geschlossenen Wege, die den eben genannten Bildern äquivalent sind, mit $\mathfrak{A}$, die Gruppe aller geschlossenen Wege durch ξ mit $\mathfrak{C}$, so ist dies die Restklassenzerlegung von $\mathfrak{C}$ modulo $\mathfrak{A}$.

Stellt man die eben für Äquivalenzklassen durchgeführte Überlegung für D.-Homologieklassen an, so kommt man zu einer Einteilung aller geschlossenen Wege durch ξ in „B-Klassen" durch die Bestimmung, daß zwei Wege C_1, C_2 dann und nur dann zu derselben B-Klasse gehören, wenn $C_1 - C_2$ dem Bilde eines geschlossenen Weges durch x d.-homolog ist; diese Einteilung ist die Restklassenzerlegung von $\mathfrak{C}$ modulo der Gruppe $\mathfrak{B}$ derjenigen geschlossenen Wege durch ξ, die Bildern geschlossener Wege durch x d.-homolog

[18]) A. a. O. heißt diese Abbildung φ; dieser Buchstabe bezeichnet aber in unserem § 3 eine andere Abbildung.

sind. Da jede 1-dimensionale D.-Homologieklasse von μ geschlossene Wege durch ξ enthält, ist — ebenso wie oben die Anzahl der A-Klassen j war — die Anzahl der B-Klassen gleich dem Index der Untergruppe derjenigen D.-Homologieklassen, die Bilder sind, in der Gruppe aller D.-Homologieklassen, also entweder unendlich oder gleich dem Produkt der Elementarteiler.

$\mathfrak{A}$ ist Untergruppe von $\mathfrak{B}$; daher kommt der Beweis von Satz VIII nunmehr auf den Beweis des folgenden gruppentheoretischen Tatbestandes hinaus: „$\mathfrak{B}$ sei Untergruppe von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ Untergruppe von $\mathfrak{B}$; die Indizes von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{C}$ seien a bzw. b, a sei endlich; dann ist auch b endlich und Teiler von a".

Gehören C_1, C_2 zu einer Restklasse modulo $\mathfrak{A}$, so ist $C_1 - C_2 < \mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, also gehören sie auch zu einer Restklasse modulo $\mathfrak{B}$; somit lassen sich die Restklassen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_a$, in die $\mathfrak{C}$ mod. $\mathfrak{A}$ zerfällt, durch Zusammenfassung zu den Restklassen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_b$ vereinigen, in die $\mathfrak{C}$ mod. $\mathfrak{B}$ zerfällt; folglich ist b endlich, (also $p_j^1 = p^1(\mu)$). $\mathfrak{B}_i$ bestehe aus r_i der Restklassen $\mathfrak{A}_k$. Es ist zu zeigen, daß $r_1 = r_2 = \cdots = r_b$ ist; denn daraus ergibt sich $a = r_1 b$.

$\mathfrak{B}_1$ bestehe aus den Klassen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{r_1}$; $C_1, C_2, \ldots, C_{r_1}$ seien Elemente aus diesen Klassen; C' sei ein Element aus $\mathfrak{B}_2$, und es sei $C' = C_1 + \bar{C}$. Dann gehören die Elemente $C^{(k)} = C_k + \bar{C}$ $(k = 1, 2, \ldots, r_1)$ zu verschiedenen Klassen $\mathfrak{A}_k$, da $C^{(k_1)} - C^{(k_2)} = C_{k_1} + \bar{C} - \bar{C} - C_{k_2} = C_{k_1} - C_{k_2} \not< \mathfrak{A}$ ist; sie gehören aber alle zu derselben Klasse $\mathfrak{B}_2$, da die eben aufgeschriebene Differenz $< \mathfrak{B}$ ist; folglich ist $r_2 \geqq r_1$, und da sich ebenso $r_1 \geqq r_2$ ergibt, $r_1 = r_2$ und allgemein $r_1 = r_i$, womit alles bewiesen ist.

Aus (C) und Satz VIII folgt:

Satz VIIIa: *Das Produkt der 1-dimensionalen Elementarteiler ist ein Teiler des Grades.*

Aus den Sätzen IV, V a und VIII folgt:

Satz VIIIb: *Haben M und μ gleiche Bettische Zahlen, — ist also z. B. $M = \mu -$, und ist $j = 1$, so gibt es in M bzw. μ 1- und $(n-1)$-dimensionale Basen z_r^1, z_r^{n-1} bzw. ζ_r^1, ζ_r^{n-1} $(r = 1, 2, \ldots, p^1)$, für die die durch f bewirkten Substitutionen die Gestalt haben:*

$$f(z_r^1) \approx \zeta_r^1 \tag{22 a}$$

$$f(z_r^{n-1}) \approx c\zeta_r^{n-1}. \tag{22 b}$$

Satz IX: *Es gebe in M n $(n-1)$-dimensionale Zyklen, deren (0-dimensionaler) Schnitt $\not\approx 0$ sei; dann ist bei jeder Abbildung von M auf eine Mannigfaltigkeit μ mit denselben Bettischen Zahlen — also z. B. auf M selbst —, bei der $c \neq 0$ ist, $|c| = j$.*

Beweis: Die in (A) genannte Mannigfaltigkeit μ^* hat dieselben Bettischen Zahlen wie M und μ; denn einerseits ist, da f^* (s. (C)) einen von 0 verschiedenen Grad hat, nach III a $p^i(M) \geqq p^i(\mu^*)$; andererseits ist, da auch ψ einen von 0 verschiedenen Grad hat, nach III a $p^i(\mu^*) \geqq p^i(\mu) = p^i(M)$.

Folglich ist, da der Index von $f^* j^* = 1$ ist, nach VIII b, Gl. (22 b), das f^*-Bild jedes $(n-1)$-dimensionalen Zyklus ein c^*-facher Zyklus in μ^*, wobei c^* der Grad von f^* ist. Mithin gehört, in der Terminologie von Satz II, 2, jeder $(n-1)$-dimensionale Zyklus von M zu $\mathfrak{R}_{f^*} + \mathfrak{R}_{j^*}$; da aber der i-dimensionale Rang von $\mathfrak{R}_{f^*}$ infolge des Isomorphismus von $\mathfrak{R}_{f^*}$ und $\mathfrak{R}(\mu^*)$ stets gleich $p^i(M) - p^i(\mu^*)$ ist, ist er in unserem Fall 0, $\mathfrak{R}_{f^*}$ besteht also nur aus dem Nullelement, und jeder $(n-1)$-dimensionale Zyklus gehört daher zu $\mathfrak{R}_{f^*}$. Da $\mathfrak{R}_{f^*}$ ein Ring ist, gehört auch jeder Schnitt $(n-1)$-dimensionaler Zyklen zu $\mathfrak{R}_{f^*}$ und hat daher nach Satz II, 2 einen c^*-fachen Zyklus in μ^* als Bild.

Nach Voraussetzung gibt es in Mn $(n-1)$-dimensionale Zyklen mit

$$z_1^{n-1} \cdot z_2^{n-1} \cdots z_n^{n-1} \approx a z^0, \qquad a \neq 0,$$

wobei z^0 einen einfach gezählten Punkt bezeichnet. Nach dem eben Bewiesenen ist $f^*(az^0) = af^*(z^0)$ ein c^*-facher Zyklus, also ist, da $f^*(z^0)$ ein einfacher Punkt ist, a durch c^* teilbar.

Dieselbe Betrachtung gilt für die k-te Iteration von f^*; da diese den Grad $(c^*)^k$ hat, ist a durch $(c^*)^k$ teilbar. Dies ist, da k beliebig groß sein kann und $a \neq 0$ ist, nur möglich, wenn $|c^*| = 1$ ist.

Dann ist nach (C) $|c| = j$.

Unter der „Charakteristik" einer Mannigfaltigkeit versteht man die alternierende Summe der Bettischen Zahlen:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i p^i(M).$$

Die „Euler-Poincarésche Formel" [19]) besagt, daß, wenn bei einer Zelleneinteilung von Ma^i i-dimensionale Zellen auftreten,

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a^i$$

ist.

Satz X: *Ist $\chi(M) \neq 0$, hat μ dieselben Bettischen Zahlen wie M und ist $c \neq 0$, so ist $j = 1$.*

Beweis: Wie im Beweis von Satz IX folgt, daß μ^* dieselben Bettischen Zahlen hat wie M und μ; folglich ist $\chi(\mu^*) = \chi(\mu)$. Andererseits bewirkt eine Zelleneinteilung von μ, bei der a^i die Anzahl der i-dimensionalen Zellen ist, eine Zelleneinteilung der j-blättrigen Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* von μ mit $j \cdot a^i$ Zellen für jedes i; daher ist mit Rücksicht auf die Euler-Poincarésche Formel $\chi(\mu^*) = j \cdot \chi(\mu)$. Folglich ist, da $\chi(\mu) = \chi(M) \neq 0$ ist, $j = 1$.

Aus den Sätzen X und VIII b folgt:

Satz Xa: *Unter den Voraussetzungen von Satz X gibt es 1- und $(n-1)$-dimensionale Basen z_r^1, z_r^{n-1} bzw. ζ_r^1, ζ_r^{n-1} in M bzw. μ, für die die durch f bewirkten Substitutionen die Gestalt* (22 a), (22 b) *haben.*

Aus den Sätzen IX und X folgt:

Satz Xb: *Die Charakteristik von M sei von 0 verschieden und es gebe in M n $(n-1)$-dimensionale Zyklen, deren Schnitt nicht homolog 0 ist; μ habe dieselben Bettischen Zahlen wie M, es sei also z. B. $M = \mu$; dann kommen als Grade für Abbildungen von M auf μ nur die Zahlen 0 und ± 1 in Frage.*

Da die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht p eine von 0 verschiedene Charakteristik hat, wenn $p \neq 1$ ist, und da es auf ihr zwei geschlossene Wege mit einem einfachen Schnittpunkt gibt, wenn $p \neq 0$ ist, besagt dieser letzte Satz, daß die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht $p > 1$ nur Abbildungen mit den Graden $0, +1, -1$ auf sich zuläßt. Diese Tatsache ist in dem allgemeineren Satz enthalten, daß, wenn $p > 0$ ist, der Grad einer Abbildung der geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht p auf die vom Geschlecht q stets die Ungleichung $|c| \cdot (q-1) \leqq p-1$ erfüllt; diesen Satz, der von H. Kneser auf geometrisch-topologischem Wege bewiesen wurde [20]), mit den in dieser Arbeit verwendeten „algebraischen" Methoden zu beweisen, habe ich vergeblich versucht.

[19]) S. z. B. Gl. (10.6) der in Fußnote 4 genannten Arbeit von Alexander.

[20]) *H. Kneser*, Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen, § 7, Math. Annalen **103** (1930).

Eingegangen 17. Oktober 1929.

Die 2. Greenschen Funktionen als Kerne von homogenen Integralgleichungen zweiter Art.

Von *Heinrich Jung* in Göttingen.

Vorbemerkungen.

Als Grundgebiete sollen den folgenden Untersuchungen zunächst nur *endliche*, d. h. *ganz im Endlichen gelegene*, ebene bzw. räumliche Gebiete zugrunde gelegt werden, und zwar solche, bei denen man zwei beliebige innere Punkte durch eine Linie verbinden kann, *die nirgends die Berandung schneidet.* Es sind dies Gebiete, die von einer einzigen geschlossenen Kurve bzw. Fläche begrenzt werden (Innengebiete), und solche, deren innere Berandung aus beliebig vielen vollkommen getrennten Stücken dieser Art besteht, die alle innerhalb eines äußeren derartigen Berandungsstückes liegen (Ringgebiete). Diese Bereiche bestehen, ungenau ausgedrückt, *aus einem Stück* und sollen daher als *einfache* bezeichnet werden. Die Berandungen selbst sollen in jedem Punkt eine *bestimmte Tangente* bzw. *Tangentialebene* besitzen, ferner überall *stetige Biegung* und *endliche Krümmung* aufweisen [1]). Solche Ränder seien als *glatt* bezeichnet. Durch diese Einschränkungen sind Komplikationen in den folgenden Untersuchungen vermieden, allerdings werden hierdurch auch verhältnismäßig einfache Gebiete, wie z. B. Rechtecke, zunächst von der Betrachtung ausgeschlossen. — Die vorliegenden Untersuchungen lassen sich leicht auf Gebiete ausdehnen, die aus mehreren Stücken bestehen, doch bietet dieser Fall wenig Interesse.

Die Berandung des Grundgebiets sei mit s bezeichnet, ihre *innere* Normale mit n_s, das Grundgebiet selbst mit τ. Die Bedeutung der Differentiale ds, dn_s, $d\tau$ ist dann ohne weiteres verständlich. — Tragen Integrale keine nähere Bezeichnung, so sind sie über das *ganze* Grundgebiet bzw. über den *ganzen* Rand zu erstrecken.

$T_j^{(i)}$ sei die Grundlösung der Laplaceschen Gleichung, also $\ln \frac{1}{E_j^{(i)}}$ in der Ebene und $\frac{1}{E_j^{(i)}}$ im Raum, wenn mit $E_j^{(i)}$ die Entfernung der Punkte (i) und (j) bezeichnet wird.

Das vielfach verwendete Symbol h bedeutet in der Ebene die Zahl 1, im Raum die Zahl 2.

Alles Weitere wird an der betreffenden Stelle im Text erläutert.

§ 1. Die 2. Greenschen Funktionen.

Die Lösung der 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie (mit gegebenen Randwerten) läßt sich bekanntlich mit Hilfe der sogenannten Greenschen Funktion (hier als 1. Greensche Funktion bezeichnet) durch eine einzige Integration bestimmen. Für die 2. Randwertaufgabe, bei welcher die normale Ableitung der gesuchten Potentialfunktion

[1]) Vgl. *E. R. Neumann*, Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie, S. 2.

gegeben ist, lassen sich ähnliche Hilfsfunktionen, die 2. Greenschen Funktionen, einführen. Mit speziellen 2. Greenschen Funktionen haben sich schon *F. Neumann* und *E. R. Neumann* beschäftigt. Hier soll das Problem in voller Allgemeinheit untersucht werden.

Es sei δ_s eine stetige Funktion der Randpunkte des Grundgebiets, die der einzigen Beschränkung

$$\int \delta_s \, ds = 1$$

unterliegt. Faßt man δ_s als Dichte einer Randbelegung auf, so besitzt diese Belegung demnach die Gesamtmasse 1 [2]). — P_i sei das Potential, das jene Belegung im inneren Punkt (i) des Grundgebiets erzeugt, also

$$P_i = \int \delta_s \, T_s^{(i)} \, ds.$$

Im übrigen ist δ_s vollkommen willkürlich. Besteht der Rand aus mehreren Stücken, so ist es auch gleichgültig, wie sich δ_s auf diese verteilt.

Nun sei eine Funktion $H_j^{(i)}$ in bekannter Weise so definiert, daß sie im ganzen Grundgebiet eine eindeutige und samt ihren ersten Ableitungen stetige Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung ist, also

$$\Delta \, H^{(i)} = 0 .$$

Ferner erfülle sie die Randbedingung

$$\frac{\partial H^{(i)}}{\partial n_s} = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n_s} - 2h\pi\delta_s \text{ [3])},$$

und zwar sei speziell die *kanonische Lösung* dieser Aufgabe gemeint, d. h. diejenige Lösung, die die Nebenbedingung

$$\int H_s^{(i)} \, \delta_s \, ds = 0$$

befriedigt [4]). Bei variablem Punkt (i) stellt $H_j^{(i)}$ eine Funktion des Pols (i) und des Aufpunkts (j) dar.

Die Funktion

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = T_j^{(i)} - H_j^{(i)} - P_i$$

ist die gesuchte 2. *Greensche Funktion* des betrachteten Grundgebiets *in Bezug auf die gewählte Randbelegung* δ_s. Auch hier ergeben sich je nach der Wahl von δ_s *verschiedene* 2. Greensche Funktionen [5]).

Diese 2. Greenschen Funktionen $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ sind Lösungen der *Laplacesschen Differentialgleichung*, die am Rand die Beziehungen

$$\frac{\partial \mathfrak{H}^{(i)}}{\partial n_s} = 2h\pi\,\delta_s \quad \text{und} \quad \int \mathfrak{H}_s^{(i)} \, \delta_s \, ds = 0$$

---

[2]) δ_s kann stellenweise negativ sein. Es treten also auch negative Massen auf.

[3]) Die für ein endliches Gebiet notwendige Nebenbedingung $\int \frac{\partial H^{(i)}}{\partial n_s} ds = 0$ ist hierbei erfüllt. — Je nach der Wahl von δ_s erhält man *verschiedene* Funktionen $H_j^{(i)}$.

[4]) Hierdurch wird die in $H_j^{(i)}$ zunächst noch unbestimmte additive Konstante festgelegt.

[5]) *F. Neumann* hat bei einfachen Grundgebieten δ_s konstant angenommen, während *E. R. Neumann* (Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie, Jablonowski-Preisschrift, Leipzig 1912) dafür die Dichte ϱ_s der natürlichen Belegung, d. i. die Ladungsdichte im elektrostatischen Gleichgewicht, die im ganzen Grundgebiet ein *konstantes Potential* erzeugt, gesetzt hat.

erfüllen. Sie sind samt ihren ersten Ableitungen, im ganzen Grundgebiet *eindeutig* und *stetig*, *ausgenommen im Pol* (i), wo sie sich wie die Grundlösung $T_j^{(i)}$ der Laplaceschen Differentialgleichung verhalten.

Die Kenntnis der Randwerte irgendeiner 2. Greenschen Funktion genügt, um die 2. Randwertaufgabe für beliebige stetige Randwerte g_s, sofern diese nur die Nebenbedingung

$$\int g_s \, ds = 0 \,^{6}).$$

erfüllen, mit einer einzigen Integration zu lösen. Die Lösung stellt sich dar in der Gestalt

$$\text{(P)} \qquad G_i = -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(i)} g_s \, ds,$$

und zwar ergibt sich speziell die *kanonische Lösung in Bezug auf* δ_s, d. h. diejenige, die der Nebenbedingung

$$\int G_s \delta_s \, ds = 0$$

genügt.

Die Formel (P) wird in bekannter Weise hergeleitet durch Anwendung des Greenschen Satzes,

$$\int (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) \, d\tau = -\int \left(\varphi_s \frac{\partial \psi}{\partial n_s} - \psi_s \frac{\partial \varphi}{\partial n_s}\right) ds,$$

auf das Grundgebiet, indem man für φ die gesuchte Potentialfunktion G_i setzt, für ψ einmal unter Ausschluß des Pols (i) durch einen kleinen Kreis bzw. eine entsprechende Kugel die Grundfunktion $T_j^{(i)}$, das zweite Mal die Funktion $H_j^{(i)}$, und schließlich die zweite so erhaltene Gleichung von der ersten subtrahiert.

Berechnet man G_i unter Zugrundelegung derselben Randwerte für die normale Ableitung mit Hilfe *verschiedener* 2. *Greenscher Funktionen*, indem man verschiedene Randbelegungen δ_s verwendet, so sind, da δ_s in die Nebenbedingung $\int G_s \delta_s \, ds = 0$ eingeht, die so gewonnenen Lösungen ein- und derselben Randwertaufgabe im allgemeinen *nicht* einander gleich. Auf Grund eines bekannten potentialtheoretischen Satzes unterscheiden sie sich um eine *additive Konstante*.

Da $H_j^{(i)}$ selbst auch eine kanonische Lösung der 2. Randwertaufgabe in Bezug auf δ_s ist, und zwar mit den Randwerten

$$g_s = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n_s} - 2h\pi \, \delta_s$$

der normalen Ableitung, kann man auch diese Funktion durch die Formel (P) ausdrücken. Durch Vertauschung von (i) und (j) ergibt sich eine entsprechende Darstellung von $H_i^{(j)}$. Weiter erhält man:

$$H_j^{(i)} - H_i^{(j)} =$$

$$= -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \left(T_s^{(j)} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n_s} - T_s^{(i)} \frac{\partial T^{(j)}}{\partial n_s}\right) ds + \frac{1}{2h\pi} \cdot \int \left(H_s^{(j)} \frac{\partial H^{(i)}}{\partial n_s} - H_s^{(i)} \frac{\partial H^{(j)}}{\partial n_s}\right) ds + P_j - P_i \,.$$

Nach dem Greenschen Satz verschwinden rechts beide Integrale (bei dem ersten ist der Pol (i) wieder in bekannter Weise auszuschließen), sodaß übrig bleibt:

$$H_j^{(i)} - H_i^{(j)} = P_j - P_i.$$

Da P_i und P_j im allgemeinen verschieden sind, ist hieraus zu ersehen, daß die Funktion

---

[6]) Diese muß nach bekannten Prinzipien bei *endlichen Gebieten* stets erfüllt sein.

$H_j^{(i)}$ im allgemeinen *nicht* symmetrisch ist in den Punkten (i) und (j), hingegen erweist sich $H_j^{(i)} + P_i$ und somit auch *die 2. Greensche Funktion* $\mathfrak{H}_j^{(i)} = T_j^{(i)} - H_j^{(i)} - P_i$ als *symmetrisch* in Pol und Aufpunkt.

Hierdurch rechtfertigt sich nachträglich die Hinzufügung des zunächst willkürlich erscheinenden Potentials P_i in der Definition der 2. Greenschen Funktion $\mathfrak{H}_j^{(i)}$.

Wählt man speziell δ_s als die *natürliche Belegung* ϱ_s des Grundgebiets, so hat P_i bei jeder Lage von (i) denselben Wert. Dann ist auch $H_j^{(i)}$ *symmetrisch*. — In dieser Tatsache liegt die innere Begründung für gewisse besonders einfache Eigenschaften, die die von E. R. Neumann [7]) mit Hilfe der natürlichen Belegung ϱ_s definierte 2. Greensche Funktion vor allen anderen mit beliebigem δ_s zu erlangenden 2. Greenschen Funktionen auszeichnet.

§ 2. Die 2. Greenschen Funktionen als Kerne von Integralgleichungen bei endlichen Grundgebieten.

Faßt man eine 2. Greensche Funktion $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ eines endlichen Grundgebietes auf als Funktion der *beiden* variablen Punkte (i) und (j), so kann man sie verwenden als Kern der symmetrischen Integralgleichung

$$\varphi_i - \varkappa \cdot \int \mathfrak{H}_j^{(i)} \varphi_j \, d\tau_j = 0 \text{ [8])}.$$

Dann ist zu untersuchen, welche Differentialgleichung und welche Randbedingung die Eigenfunktionen φ erfüllen.

Es ist bekannt, daß die Eigenfunktionen derjenigen Integralgleichung, die die 1. *Greensche Funktion* als Kern besitzt, die Differentialgleichung $\Delta\varphi + 2h\pi\varkappa\varphi = 0$ und die 1. *Randbedingung* $\varphi_s = 0$ erfüllen. Man könnte nun vermuten, daß bei unserer Integralgleichung dementsprechend die Eigenfunktionen φ derselben Differentialgleichung und der 2. *Randbedingung* unterworfen sind, nämlich $\frac{\partial\varphi}{\partial n_s} = 0$. Dies ist jedoch nicht der Fall. A. Kneser [9]) hat nämlich diejenige Integralgleichung bestimmt, deren Eigenfunktionen die besagte Differentialgleichung mit der 2. Randbedingung erfüllen. Als Kern erhielt er eine Funktion $K_j^{(i)}$, die statt der Laplaceschen Gleichung die Differentialgleichung

$$\Delta K^{(i)} = a$$

erfüllt, worin a eine zunächst noch unbestimmte Konstante darstellt, die aber sicher von 0 verschieden ist. Ferner genügt $K_j^{(i)}$ der 2. Randbedingung und verhält sich im Pol (i) wie die Greenschen Funktionen. Da der Kern einer Integralgleichung durch die Gesamtheit der Eigenfunktionen *eindeutig* bestimmt ist, ist hiermit gezeigt, daß der oben erwähnte Zusammenhang *nicht* besteht, denn der Knesersche Kern ist von allen 2. Greenschen Funktionen *verschieden*.

Überblickt man die Sachlage bei der 1. Greenschen Funktion und den von Kneser behandelten Fall, so sieht man, daß *sich die Eigenfunktionen am Rand ebenso verhalten wie der Kern der zugehörigen Integralgleichung*. Das legt nun die Vermutung nahe, daß in unserem Fall, da eine 2. *Greensche Funktion* den Kern bildet, die Eigenfunktionen am

---

[7]) Vgl. *E. R. Neumann*, Beiträge.

[8]) Der Index j deutet an, daß sich die Integration auf den variablen Punkt (j) bezieht.

[9]) *A. Kneser*, Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der mathematischen Physik, 2. Aufl., Braunschweig 1922, S. 154.

Rand dieselben Bedingungen erfüllen wie diese, *also* $\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 2h\pi\delta_s$ *und* $\int \varphi_s \delta_s ds = 0$. In der Tat werden die folgenden Untersuchungen zum Teil auf diese Randbedingungen führen, *jedoch ergeben sich daneben auch Eigenfunktionen mit anderen Randeigenschaften.*

Zunächst ist es praktisch, in der Integralgleichung

$$\varkappa = \frac{k^2}{2h\pi}$$ [10])

zu setzen und der Kürze halber fortan k als Eigenwert zu bezeichnen. Die Integralgleichung lautet dann:

(J) $$\varphi_i - \frac{k^2}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_j^{(i)} \varphi_j \delta\tau_j = 0.$$

Mit Hilfe der bekannten Poissonschen Formel

$$\Delta \int T_j^{(i)} \varphi_j d\tau_j = -2h\pi \varphi_i$$ [11])

und der Definition der Funktionen $H_j^{(i)}$ und $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ erhält man unmittelbar für die Eigenfunktionen die Differentialgleichung

(D) $$\Delta \varphi + k^2 \varphi = 0.$$

Am Rand ist

$$\varphi_s = \frac{k^2}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_j^{(s)} \varphi_j d\tau_j = \frac{k^2}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(j)} \varphi_j d\tau_j.$$

Berücksichtigt man die Randeigenschaften von $\mathfrak{H}_j^{(i)}$, so ergeben sich hieraus direkt die beiden Beziehungen

(R_1) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = a\,\delta_s,$$

(R_2) $$\int \varphi_s \delta_s ds = 0,$$

worin

$$a = k^2 \int \varphi\, d\tau$$

eine Konstante ist, die sich mit Hilfe der Differentialgleichung (D) und des Gaußschen Satzes $\left(\int \Delta\varphi\, \delta\tau = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} ds\right)$ auch als Randintegral darstellen läßt:

$$a = \int \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} ds.$$

Bei der Ableitung von (R_1) wird unter dem Integral differenziert, bei (R_2) müssen die Integrationen über τ und s vertauscht werden. Da $\mathfrak{H}_s^{(j)}$ in gewissen Randelementen $d\tau_j$ unstetig wird, muß die Zulässigkeit dieser Operationen noch bewiesen werden. Dies bietet jedoch keinerlei Schwierigkeit, wenn man den Rand zunächst durch eine in seiner unmittelbaren Nähe laufende Kurve bzw. Fläche ausschließt und hernach diese mehr und mehr dem Rand nähert.

Sind umgekehrt die Differentialgleichung (D) und die Randbedingungen (R_1) und (R_2) gegeben, so läßt sich hieraus die Integralgleichung (J) ableiten. Dies gelingt leicht,

---

[10]) $\varkappa$ ist nämlich *positiv*. Dies ergibt sich aus der bekannten Formel $\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \cdots\right] d\tau + \int \varphi \Delta\varphi\, d\tau = -\int \varphi_s \frac{\partial \varphi}{\partial n_s} ds$ und den weiter unten abgeleiteten Beziehungen (D), (R_1), (R_2).

[11]) Die Differentiation bezieht sich auf den Punkt (i).

indem man im Greenschen Satz für φ eine Lösung von (D), (R_1) und (R_2) setzt, für ψ einmal unter Ausschluß des Pols (i) die Grundlösung $T_j^{(i)}$, das andere Mal die Funktion $H_j^{(i)}$, und schließlich die so erhaltenen Gleichungen subtrahiert.

Die Eigenfunktionen φ lassen sich *in zwei Gruppen* teilen, je nachdem die Konstante *a gleich* oder *verschieden* von 0 ist.

a) Ist $a = 0$ [12]), so ergeben sich die Randbedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 0 \text{ und } \int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0 .$$

Die zu dieser Gruppe gehörigen Eigenfunktionen erfüllen *die 2. Randbedingung*. Jedoch sind es wegen der Zusatzbedingung $\int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0$ *nicht alle* Lösungen der Differentialgleichung (D), die dieser Randbedingung genügen. — Die Eigenfunktionen dieser Gruppe sind auch Eigenfunktionen *der Kneserschen Integralgleichung*. Man hat also hier den bemerkenswerten Fall, daß zwei *verschiedene* Integralgleichungen *in einem Teil ihrer Eigenfunktionen übereinstimmen*.

In den Eigenfunktionen ist noch ein Normierungsfaktor unbestimmt. Er soll in der üblichen Weise festgesetzt werden, d. h. so, daß $\int \varphi^2 \, d\tau = 1$ ist.

b) Ist $a \neq 0$, so werde der Normierungsfaktor so gewählt, daß

$$a = 2h\pi$$ [13])

ist. Es ergeben sich dann die Randbedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 2h\pi\delta_s \quad \text{und} \quad \int \varphi_s \delta_s \, ds = 0 .$$

Die Eigenfunktionen dieser Gruppe haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihre normale Ableitung am Rand *proportional der Belegung* δ_s ist. Sie besitzen bei der gewählten Normierung *dieselben* Randeigenschaften wie die zugehörige 2. Greensche Funktion, d. h. *wie der Kern der Integralgleichung*.

Zusammenfassung: Legt man der Betrachtung ein *einfaches endliches* Gebiet zugrunde, so sind die Eigenfunktionen der Integralgleichung (J), deren Kern gebildet wird von der *zu einer Randfunktion* δ_s *gehörigen* 2. *Greenschen Funktion* des Grundgebiets, zugleich Lösungen der Differentialgleichung (D), welche sich nach den Randbedingungen in die oben erwähnten beiden Gruppen teilen:

a) mit den Randbedingungen $\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 0$ und $\int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0$,

b) mit den Randbedingungen $\frac{\partial \varphi}{\partial n_s} = 2h\pi \, \delta_s$ und $\int \varphi_s \, \delta_s \, ds = 0$.

Umgekehrt sind auch alle Lösungen der Differentialgleichung (D), die diese Randbedingungen erfüllen, zugleich Eigenfunktionen der Integralgleichung (J).

§ 3. Unendliche Grundgebiete.

Unter einem *unendlichen* Grundgebiet sei ein solches Gebiet verstanden, das im Gegensatz zu einem endlichen Grundgebiet den *unendlichfernen Punkt* der Ebene bzw. des Raumes als *inneren* Punkt enthält. Die *ganz im Endlichen gelegene* Berandung sei ebenso beschaffen wie bei endlichen Gebieten. Ferner sollen wieder nur *einfache* Grundgebiete betrachtet werden.

---

[12]) Daß dieser Fall eintreten kann, wird später durch Beispiele gezeigt.

[13]) Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß diese Art der Normierung mit der bei Integralgleichungen üblichen im allgemeinen *nicht* übereinstimmt.

Sind der Pol (a) und der Aufpunkt (α) Punkte eines solchen Gebiets und n_s die ins Innere des Grundgebiets weisende Randnormale, so ist nach *E. R. Neumann* die 2. Greensche Funktion definiert durch

$$\mathfrak{H}_\alpha^{(a)} = T_\alpha^{(a)} - H_\alpha^{(a)},$$

wobei $H_\alpha^{(a)}$ eine *harmonische Funktion* [14]) des Grundgebiets ist, *die am Rand der Bedingung*

$$\frac{\partial H^{(a)}}{\partial n_s} = \frac{\partial T^{(a)}}{\partial n_s}$$

genügt. $H_\alpha^{(a)}$ ist *symmetrisch* in (a) und (α), ebenso $\mathfrak{H}_\alpha^{(a)}$.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Integralgleichung

$$\varphi_a - \varkappa \cdot \int \mathfrak{H}_\alpha^{(a)} \varphi_\alpha \, d\tau_\alpha = 0$$

außer der trivialen identisch verschwindenden Lösung *keine* Eigenfunktion φ besitzt. Der Beweis wird so geführt, daß man zunächst die Existenz von Eigenfunktionen postuliert und dann zeigt, daß diese identisch 0 sein müssen.

Mit Hilfe der Formel

$$H_\alpha^{(a)} = -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(a)} \frac{\partial T^{(\alpha)}}{\partial n_s} \, ds,$$

die sich wegen der Symmetrie von $H_\alpha^{(a)}$ direkt aus der bekannten Beziehung

$$H_\alpha^{(a)} = -\frac{1}{2h\pi} \cdot \int \mathfrak{H}_s^{(\alpha)} \frac{\partial T^{(a)}}{\partial n_s} \, ds$$ [15])

ergibt, erhält man durch einfache Überlegungen, daß sich

$$\frac{1}{T_\alpha^{(o)}} \mathfrak{H}_\alpha^{(a)} \quad \text{dem Wert 1}$$

nähert, wenn (α) ins Unendliche rückt und (o) einen beliebigen, aber festen Punkt der Ebene bzw. des Raumes [16]) darstellt.

Hieraus ist leicht zu ersehen, daß das in der Integralgleichung auftretende Integral

$$\int \mathfrak{H}_\alpha^{(a)} \varphi_\alpha \, d\tau_\alpha$$

nur dann existiert, wenn im Unendlichen

$$E^{2+\beta} \int \varphi \, d\omega \quad \textit{endlich}$$

ist, wobei E die *Entfernung* des ins Unendliche wandernden Aufpunkts (α) von dem festen Punkt (o) darstellt, β eine unbestimmte, *wirklich positive*, aber beliebig kleine Zahl bezeichnet und $d\omega$ den zum Zentrum (o) gehörigen ebenen oder räumlichen Gesichtswinkel des Elementes eines das Unendliche ausschließenden Kreises bzw. einer entsprechenden Kugel mit dem Mittelpunkt (o) bedeutet, auf welcher die Werte von φ ausgebreitet zu denken sind [17]).

Da $\mathfrak{H}_\alpha^{(a)}$ abgesehen von der Unstetigkeit im Pol (a) eine harmonische Funktion des Grundgebiets ist, verschwindet die Ableitung von $\mathfrak{H}_\alpha^{(a)}$ nach einer beliebigen Richtung $\mathfrak{r}$ im Unendlichen derart, daß

$$E^h \frac{\partial \mathfrak{H}^{(a)}}{\partial \mathfrak{r}_\alpha} \quad \text{endlich}$$

---

[14]) Vgl. *E. R. Neumann*, Beiträge.

[15]) Beiträge, S. 64.

[16]) (o) braucht nicht im Grundgebiet zu liegen.

[17]) Das Integral ist über der *ganzen Kreis* bzw. die *ganze Kugel zu* erstrecken.

bleibt. Hieraus ergibt sich mit Hilfe der Integralgleichung, daß auch

$$E^{1+\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{r}_\alpha} \quad \textit{endlich}$$

ist im Unendlichen, wenn γ eine *wirklich positive* Zahl darstellt, die andererseits *sicher kleiner als* β ist ($\beta > \gamma > 0$). Zum Beweis schließt man das Unendliche aus durch eine Hilfsberandung Σ, nimmt an dieser die normale innere Ableitung (wobei die Differentiation unter dem Integral erlaubt ist) und läßt diese Berandung sich nachträglich unbegrenzt ausdehnen. —

Wie bei endlichen Gebieten erfüllen die Eigenfunktionen, falls sie existieren, die Differentialgleichung

$$\Delta\varphi + 2h\pi\varkappa\varphi = 0.$$

Bei der Herleitung dieses Resultats muß allerdings erst untersucht werden, ob die *Poissonsche Formel*

$$\Delta\int T_\alpha^{(a)}\varphi_\alpha\, d\tau_\alpha = -2h\pi\varphi_a$$

auch auf *unendliche Gebiete* anwendbar ist. Geht man von den Differenzenquotienten aus, die der Differentialoperation Δ entsprechen, so läßt sich mit elementaren Mitteln zeigen, daß der Beitrag, den das Unendliche zur linken Seite der Formel liefert, schon bei den Differenzenquotienten verschwindet, also um so mehr bei Δ, und zwar in der Ebene wie im Raum, wenn sich $\int\varphi\, d\omega$ *im Unendlichen verhält wie* $E^{1-\delta}$, wobei δ wieder eine beliebige, aber wirklich positive Zahl darstellt. Letztere Bedingung ist aber nach den obigen Ausführungen erfüllt, und damit *ist die Gültigkeit der Poissonschen Formel bewiesen.*

Mittels der Hilfsberandung Σ läßt sich, wenn man das Verhalten der Eigenfunktionen im Unendlichen beachtet, ebenso wie bei endlichen Gebieten zeigen, daß der Eigenwert $\varkappa$ *positiv* ist [18]). Wieder sei

$$\varkappa = \frac{k^2}{2h\pi}$$

gesetzt und fortan die Größe k als Eigenwert bezeichnet. k ist auf jeden Fall *reell.*

A. Sommerfeld [19]) hat nun gezeigt, daß für *beliebige reelle* Werte von k eine Funktion existiert von folgenden Eigenschaften:

1. *Diese Funktion* $\mathfrak{U}$ *genügt* außer im Pol (a) im ganzen unendlichen Grundgebiet *der Differentialgleichung*

$$\Delta\mathfrak{U} + k^2\mathfrak{U} = 0,$$

d. h. derselben, der auch die Eigenfunktionen genügen.

2. *In der nächsten Umgebung von* (a) *verhält sich* $\mathfrak{U}$ *wie* $-\frac{1}{2h\pi}T_\alpha^{(a)}$.

3. *Auf dem Rande* s *erfüllt* $\mathfrak{U}$ *die 2. Randbedingung*

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial n_s} = 0\ ^{20}).$$

---

[18]) Vgl. Fußnote 10, S. 93.

[19]) *A. Sommerfeld*, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1912, S. 303 ff. — Sommerfelds Greensche Funktionen sind nicht mit unseren Greenschen Funktionen zu verwechseln und seien daher als *Sommerfeldsche Funktionen* bezeichnet.

[20]) In Sommerfelds Beispiel steht statt dessen die 1. Randbedingung $\mathfrak{U}_s = 0$. Doch gilt für $\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial n_s} = 0$ wörtlich dasselbe.

4. *Im Unendlichen verschwindet* $\mathfrak{U}$ *derart, daß*

$$E^{\frac{h}{2}}\,\mathfrak{U} \quad \textit{endlich}$$

bleibt.

5. Ist n_Σ die *innere* Normale der oben erwähnten Hilfsberandung Σ, *so gilt* bei unbegrenzter Ausdehnung von Σ *die Beziehung*

$$\lim E^{\frac{h}{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_\Sigma} - ik\,\mathfrak{U}_\Sigma\right) = 0.$$

Hieraus ergibt sich, daß im Unendlichen auch

$$E^{\frac{h}{2}}\,\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_\Sigma} \quad \textit{endlich}$$

ist.

Die Existenz dieser Funktionen $\mathfrak{U}$ ist nach Sommerfeld *physikalisch evident*, da sie bestimmten, in der Natur vorkommenden Schwingungszuständen entsprechen. Der strenge mathematische Existenzbeweis ist erst in wenigen Spezialfällen erbracht. Bei einfachen Berandungen läßt sich die Funktion $\mathfrak{U}$ berechnen, so z. B. beim Außengebiet des Kreises.

Wendet man den Greenschen Satz an auf die Eigenfunktionen φ und *diejenige Sommerfeldsche Funktion* $\mathfrak{U}$, die *zu dem betreffenden Eigenwert* k gehört, d. h. die *dieselbe* Differentialgleichung erfüllt wie φ, indem man unter Ausschluß des Pols (a) das Gebiet zwischen s und Σ zugrundelegt, so ergibt sich bei unbegrenzter Ausdehnung von Σ:

$$\varphi_a = -\int (\varphi\,\Delta\mathfrak{U} - \mathfrak{U}\,\Delta\varphi)\,d\tau - \int\left(\varphi_s\,\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_s} - \mathfrak{U}_s\,\frac{\partial \varphi}{\partial n_s}\right) ds -$$

$$- \lim \int\left(\varphi_\Sigma\,\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n_\Sigma} - \mathfrak{U}_\Sigma\,\frac{\partial \varphi}{\partial n_\Sigma}\right) d\Sigma.$$

Hierin verschwindet das erste Integral rechts wegen der Differentialgleichung, der φ und $\mathfrak{U}$ genügen, das zweite wegen der Randbedingungen längs s, schließlich der Limes wegen des Verhaltens beider Funktionen und ihrer Ableitungen im Unendlichen, wenn man für Σ speziell den oben erwähnten Kreis um (o) bzw. die entsprechende Kugel wählt. Da diese Betrachtungen für *jede Lage des Pols* (a) gelten, muß somit φ identisch verschwinden.

Damit ist das im Anfang dieses Paragraphen gesteckte Ziel erreicht. Außer der trivialen Nullösung gibt es bei unendlichen Grundgebieten *keine* Eigenfunktionen unserer Integralgleichung.

§ 4. Beispiele.

1. Kreis (Radius R),

$$\delta_s = \varrho_s = \frac{1}{2\pi R} \quad \text{(Spezialfall von F. Neumann und E. R. Neumann).}$$

Bei Verwendung der *gewöhnlichen Polarkoordinaten* ergibt sich mit Hilfe der bekannten Entwicklung (für $r > r_i$)

$$\ln \frac{1}{E_j^{(i)}} = \ln \frac{1}{r} + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{r_i}{r}\right)^\nu \cos\left[\nu\,(\vartheta - \vartheta_i)\right]$$

nach einfachen Rechnungen die 2. Greensche Funktion $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ als folgende Fourierreihe:

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \ln \frac{R}{r} + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{r_i}{R}\right)^\nu \left[\left(\frac{R}{r}\right)^\nu + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu\right] \cos\left[\,\nu\,(\vartheta - \vartheta_i)\right]$$

(für $r > r_i$).

Die *orthogonalisierten* und nach den Vorschriften des § 2 *normierten* Eigenfunktionen erhält man ebenfalls auf bekannte Weise, und zwar:

Gruppe a):

$$\varphi_{\nu\varkappa} = \begin{cases} a_{\nu\varkappa}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r)} \cos(\nu\vartheta) \\ b_{\nu\varkappa}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r)} \sin(\nu\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

worin die Faktoren $a_{\nu\varkappa}$ und $b_{\nu\varkappa}$ durch *gewöhnliche Normierung* zu bestimmen sind, die Eigenwerte $k_{\nu\varkappa}$ die *positiven Lösungen* der Gleichungen

$$J'_{\nu(k_{\nu\varkappa} R)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

darstellen und $J_{\nu(x)}$ die *Besselsche Funktion ν-ter Ordnung* bedeutet.

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = -\frac{1}{k_{0\varkappa} R\, J'_{0(k_{0\varkappa} R)}}\, J_{0(k_{0\varkappa} r)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

worin die Eigenwerte $k_{0\varkappa}$ die *positiven Lösungen* von

$$J_{0(k_{0\varkappa} R)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

sind.

Hieraus ist ersichtlich, daß im allgemeinen die $k_{0\varkappa}$ *einfache*, die $k_{\nu\varkappa}$ hingegen *zweifache* Eigenwerte sind [21]).

Daß alle diese Eigenfunktionen tatsächlich die Integralgleichung mit dem Kern $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ befriedigen, läßt sich leicht direkt nachweisen [22]). Ferner sieht man unschwer, daß sie alle in § 2 angegebenen Eigenschaften besitzen.

Setzt man für den Kern $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ und seine Iterierten die bekannten *bilinearen Entwicklungen nach den Eigenfunktionen* [23]) an, so ergeben sich, da der Kern und die Iterierten als *einfache Fourierreihen* dargestellt sind, die Eigenfunktionsreihen aber als solche Fourierreihen, *deren Koeffizienten ihrerseits aus unendlichen nach Besselschen Funktionen fortschreitenden Reihen bestehen*, durch Vergleich beider Darstellungen interessante Resultate über letztere Koeffizientenreihen. Beim Kern selbst ist allerdings gewisse Vorsicht nötig, da $\mathfrak{H}_j^{(i)}$ im Pol (i) *unstetig* ist und die Gültigkeit der bilinearen Entwicklung auf anderem Wege nachgewiesen werden muß [24]). *Bei den Iterierten hingegen besteht keinerlei Vorbehalt.* Für den Kern und die erste Iterierte ergeben sich folgende Reihen (für $r > r_i$):

Kern:

$$\sum_1^\infty \frac{J_{0(k_{0\varkappa} r)}\, J_{0(k_{0\varkappa} r_i)}}{k_{0\varkappa}^2\, J'^2_{0(k_{0\varkappa} R)}} \approx \frac{R^2}{2} \cdot \ln \frac{R}{r}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots) \qquad \sum_1^\infty \frac{J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r)}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa} r_i)}}{(k_{\nu\varkappa}^2 R^2 - \nu^2)\, J^2_{\nu(k_{\nu\varkappa} R)}} \approx \frac{1}{4\nu} \left(\frac{r_i}{R}\right)^\nu \left[\left(\frac{R}{r}\right)^\nu + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu\right]$$

---

[21]) *Mehr als 2-fache* Eigenwerte treten nur dann auf, wenn 2 *oder mehrere* der Gleichungen

$$J_{0(kR)} = 0 \text{ und } J'_{\nu(kR)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

von *ein und demselben Wert k* gleichzeitig befriedigt werden. Die Möglichkeit hierfür ist nicht ohne weiteres abzustreiten, aber es ist dies nach den bisherigen Untersuchungen über Besselsche Funktionen *sehr unwahrscheinlich.*

[22]) Die hierzu nötigen Formeln finden sich in Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I, Braunschweig 1900, § 69.

[23]) Zu beachten ist, daß alle Eigenfunktionen gemäß $\int \varphi^2\, d\tau = 1$ zu normieren sind.

[24]) Deshalb steht auch weiter unten das Zeichen $\approx$ statt des Gleichheitszeichens.

1. *Iterierte*:

$$\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{0(k_{0\varkappa}r)}\, J_{0(k_{0\varkappa}r_i)}}{k_{0\varkappa}^4\, J_0'^2{}_{(k_{0\varkappa}R)}} = \frac{R^2}{8}\left[(R^2 - r^2) - (r^2 + r_i^2)\cdot \ln\frac{R}{r}\right]$$

$$\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{1(k_{1\varkappa}r)}\, J_{1(k_{1\varkappa}r_i)}}{k_{1\varkappa}^2\,(k_{1\varkappa}^2 R^2 - 1)\, J_{1(k_{1\varkappa}R)}^2} = \frac{r_i}{8}\left[r\left(2 + \ln\frac{R}{r}\right) - \frac{1}{4R^4}(r^2 + r_i^2)\left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R}\right)\right]$$

$$\sum_1^\infty{}_\varkappa \frac{J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r_i)}}{k_{\nu\varkappa}^2(k_{\nu\varkappa}^2 R^2 - \nu^2)\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}R)}^2} =$$

$$= \frac{1}{8\nu^2}\left[\frac{\nu}{2}\left(\frac{r_i}{r}\right)^\nu\left(\frac{r^2}{\nu - 1} - \frac{r_i^2}{\nu + 1}\right) + \frac{1}{\nu + 1}\frac{(rr_i)^\nu}{R^{2\nu}}\left(\frac{\nu^2 - 2}{\nu - 1}R^2 - \frac{\nu}{2}(r^2 + r_i^2)\right)\right]$$

$$(\nu = 2, 3, \ldots).$$

In gleicher Weise ergeben sich bei den höheren Iterierten ähnliche Reihen, auf deren linker Seite im Nenner nur die Exponenten von $k_{0\varkappa}$, $k_{1\varkappa}$ und $k_{\nu\varkappa}$ außerhalb der Klammern bei der n-ten Iterierten die Werte $2n$, $2n-2$ und $2n-2$ besitzen und die rechten Seiten aus den Fourierentwicklungen der Iterierten zu entnehmen sind.

Schließlich ist es noch interessant, unsere Eigenfunktionen φ zu vergleichen mit *den Eigenfunktionen der Kneserschen Integralgleichung*, d. h. den Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, die *der 2. Randbedingung* $\dfrac{\partial u}{\partial n_s} = 0$ genügen. Letztere sind:

Gruppe α):

$$u_{\nu\varkappa} = \begin{cases} a_{\nu\varkappa}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\cos(\nu\vartheta) \\ b_{\nu\varkappa}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\sin(\nu\vartheta) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix}\nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots\end{pmatrix},$$

wobei $k_{\nu\varkappa}$ die positiven Lösungen von

$$J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R)} = 0 \qquad \begin{pmatrix}\nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

darstellen,

Gruppe β):

$$u_{0\varkappa} = a_{0k}\, J_{0(k_{0\varkappa}r)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

worin $k_{0\varkappa}$ die positiven Wurzeln der Gleichung

$$J'_{0(k_{0\varkappa}R)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

sind.

Die Funktionen der Gruppe α) erfüllen die Nebenbedingung $\int u_s\, \delta_s\, ds = 0$. Sie sind *identisch* mit den Eigenfunktionen $\varphi_{\nu\varkappa}$ *unserer Gruppe* a). Die Gruppe β) hingegen enthält nur solche Eigenfunktionen der Kneserschen Integralgleichung, die jene Nebenbedingung *nicht* erfüllen und somit *keine* Eigenfunktionen unserer Integralgleichung sind. An ihre Stelle treten die Funktionen $\varphi_{\nu\varkappa}$ *der Gruppe* b).

Die *Sommerfeldsche Funktion* $\mathfrak{U}$ für das *Außengebiet des Kreises* stellt sich dar durch die Reihe (für $r < r_a$)

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{4i}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\nu\, {}^{(1)}H_{\nu(kr_a)}\left(J_{\nu(kr)} - J'_{\nu(kR)}\frac{{}^{(1)}H_{\nu(kr)}}{{}^{(1)}H'_{\nu(kR)}}\right)\cos\left[\nu(\vartheta - \vartheta_a)\right],$$

wobei $J_{\nu(x)}$ die *Besselschen* und ${}^{(1)}H_{\nu(x)}$ die *ersten Hankelschen Funktionen ν-ter Ordnung* sind.

2. Konzentrischer Kreisring (innerer Radius R_1, äußerer Radius R_2),

$$\delta_s = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi R_2} & \text{auf dem Außenrand} \\ 0 & \text{auf dem Innenrand.} \end{cases}$$

2. *Greensche Funktion* (für $r > r_i$):

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \ln \frac{R}{r} + \sum_1^\infty \frac{1}{\nu} \left[\frac{(rr_i)^{2\nu} + R_1^{2\nu}(r^{2\nu} + r_i^{2\nu}) + (R_1 R_2)^{2\nu}}{(rr_i)^\nu (R_2^{2\nu} - R_1^{2\nu})} + \left(\frac{r_i}{r}\right)^\nu \right] \cos\left[\nu(\vartheta - \vartheta_i)\right].$$

Eigenfunktionen:

Gruppe a):

$$\varphi_{\nu\varkappa} = \alpha_{\nu\varkappa}\left(Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)} - J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, Y_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\right) \begin{cases} \cos(\nu\vartheta) \\ \sin(\nu\vartheta) \end{cases}$$

$$= \beta_{\nu\varkappa}\left(Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)}\, J_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)} - J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)}\, Y_{\nu(k_{\nu\varkappa}r)}\right) \begin{cases} \cos(\nu\vartheta) \\ \sin(\nu\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

worin die $k_{\nu\varkappa}$ zu bestimmen sind aus den Gleichungen

$$Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, J'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)} - J_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_1)}\, Y'_{\nu(k_{\nu\varkappa}R_2)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}^{25})$$

und $\alpha_{\nu\varkappa}$ bzw. $\beta_{\nu\varkappa}$ Konstanten darstellen, die durch gewöhnliche Normierung festzulegen sind [26]).

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = -\frac{1}{k_{0\varkappa}R_2\left(Y'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, J'_{0(k_{0\varkappa}R_2)} - J'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, Y'_{0(k_{0\varkappa}R_2)}\right)} \cdot$$

$$\cdot \left(Y'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, J_{0(k_{0\varkappa}r)} - J'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, Y_{(k_{0\varkappa}r)}\right),$$

wobei die $k_{0\varkappa}$ aus

$$Y'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, J_{0(k_{0\varkappa}R_2)} - J'_{0(k_{0\varkappa}R_1)}\, Y_{0(k_{0\varkappa}R_2)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

bestimmt werden.

3. Kugel (Radius R),

$$\delta_s = \varrho_s = \frac{1}{4\pi R^2}.$$

Bei gewöhnlichen Kugelkoordinaten r, ϑ, φ ergibt sich mit Hilfe der bekannten Kugelfunktionsentwicklung (für $r > r_i$)

$$\frac{1}{E_j^{(i)}} = \frac{1}{r} + \sum_1^\infty \frac{r_\nu^i}{r^{\nu+1}} \left\{ P_{\nu(\cos\vartheta_i)}\, P_{\nu(\cos\vartheta)} + \sum_1^\nu 2\, \frac{(\nu - j)!}{(\nu + j)!}\, P_{\nu j(\cos\vartheta_i)}\, P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos\left[j(\varphi - \varphi_i)\right] \right\}^{27})$$

die 2. *Greensche Funktion* (für $r > r_i$) in der Form

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) +$$

$$+ \sum_1^\infty \left[\frac{\nu + 1}{\nu}\, \frac{(rr_i)^\nu}{R^{2\nu+1}} + \frac{r_i^\nu}{r^{\nu+1}} \left\{ P_{\nu(\cos\vartheta_i)}\, P_{\nu(\cos\vartheta)} + \sum_1^\nu 2\, \frac{(\nu - j)!}{(\nu + j)!}\, P_{\nu j(\cos\vartheta_i)}\, P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \cos\left[j(\varphi - \varphi_i)\right] \right\} \right].$$

---

[25]) Hierdurch erweisen sich beide Darstellungen der $\varphi_{\nu\varkappa}$ als *identisch*.

[26]) Die $Y_{\nu\varkappa}$ sind irgendwelche von den $J_{\nu\varkappa}$ *linear unabhängige* Lösungen der *Besselschen Differentialgleichung*, z. B. die *Besselschen Funktionen zweiter Art*.

[27]) Hierin sind $P_{\nu(x)}$ die bekannten *Legendreschen Polynome*, während mit $P_{\nu j(x)}$ *die Funktionen* $(\sqrt{1-x^2})^j \cdot \frac{d^j P_{\nu(x)}}{dx^j}$ bezeichnet sind.

Eigenfunktionen:
Gruppe a):

$$\varphi_{\nu\varkappa} = \begin{cases} a_{\nu\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} P_{\nu(\cos\vartheta)} \\ a_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos(j\varphi) \\ b_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \sin(j\varphi) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots, \nu \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

wobei die $k_{\nu\varkappa}$ zu bestimmen sind aus den Gleichungen

$$J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} R)} - 2\, k_{\nu\varkappa} R\, J'_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} R)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = -\frac{1}{k_{0\varkappa}(\sqrt{R})^3 J'_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} R)}} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} r)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

worin die $k_{0\varkappa}$ durch

$$J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} R)} = 0$$

geliefert werden.

Es sind hiernach im allgemeinen die $k_{0\varkappa}$ *einfache* und die $k_{\nu\varkappa}$ $(2\nu+1)$-*fache* Eigenwerte [28]).

4. Konzentrische Kugelschale (Radien R_1, R_2),

$$\delta_s = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi R_2^2} & \text{am Außenrand} \\ 0 & \text{am Innenrand.} \end{cases}$$

2. *Greensche Funktion* (für $r > r_i$):

$$\mathfrak{H}_j^{(i)} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + \sum_1^\infty \left[\frac{\nu^2 (R_1 R_2)^{2\nu+1} + \nu(\nu+1) R_1^{2\nu+1} (r^{2\nu+1} + r_i^{2\nu+1}) + (\nu+1)^2 (r\, r_i)^{2\nu+1}}{\nu(\nu+1)\,(R_1^{2\nu+1} + R_2^{2\nu+1})\,(r\, r_i)^{\nu+1}} + \frac{r_i^\nu}{r^{\nu+1}} \right] \cdot$$

$$\cdot \{ P_{\nu(\cos\vartheta_i)} P_{\nu(\cos\vartheta)} + \sum_1^\nu 2 \frac{(\nu-j)!}{(\nu+j)!} P_{\nu j(\cos\vartheta_i)} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos[j(\varphi - \varphi_i)] \}.$$

Eigenfunktionen:
Gruppe a):

$$\varphi_{\nu\varkappa} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\nu\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[1, -(\nu+\frac{1}{2})] J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [1, \nu+\frac{1}{2}] J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)} \} P_{\nu(\cos\vartheta)} \\ \alpha_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[1, -(\nu+\frac{1}{2})] J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [1, \nu+\frac{1}{2}] J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)} \} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos(j\varphi) \\ \alpha_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[1, -(\nu+\frac{1}{2})] J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [1, \nu+\frac{1}{2}] J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)} \} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \sin(j\varphi) \end{array} \right\} \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots, \nu \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \beta_{\nu\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[2, -(\nu+\frac{1}{2})] J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [2, \nu+\frac{1}{2}] J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)} \} P_{\nu(\cos\vartheta)} \\ \beta_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[2, -(\nu+\frac{1}{2})] J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [2, \nu+\frac{1}{2}] J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)} \} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \cos(j\varphi) \\ \beta_{\nu j\varkappa} \dfrac{1}{\sqrt{r}} \{[2, -(\nu+\frac{1}{2})] J_{\nu+\frac{1}{2}(k_{\nu\varkappa} r)} - [2, \nu+\frac{1}{2}] J_{-(\nu+\frac{1}{2})(k_{\nu\varkappa} r)} \} P_{\nu j(\cos\vartheta)} \sin(j\varphi) \end{array} \right\}$$

[28]) Bezüglich *mehr als* 2-*facher* Eigenwerte gilt Ähnliches wie beim Kreisgebiet.

worin wegen allzu großer Länge der Formeln folgende Abkürzungen eingeführt sind:

$$[1, n] \text{ für } J_{n(kR_1)} - 2k R_1 J'_{n(kR_1)}$$
$$[2, n] \text{ für } J_{n(kR_2)} - 2k R_2 J'_{n(kR_2)}.$$

Die Eigenwerte $k_{\nu\varkappa}$ sind zu bestimmen aus den Gleichungen

$$[1, -(\nu+\tfrac{1}{2})]\,[2, \nu+\tfrac{1}{2}] - [1, \nu+\tfrac{1}{2}]\,[2, -(\nu+\tfrac{1}{2})] = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Gruppe b):

$$\varphi_{0\varkappa} = \frac{2}{\sqrt{R_2}\,\{[1, -\tfrac{1}{2}]\,[2, \tfrac{1}{2}] - [1, \tfrac{1}{2}]\,[2, -\tfrac{1}{2}]\}} \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot$$
$$\cdot \{[1, -\tfrac{1}{2}]\, J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} r)}\, [1, \tfrac{1}{2}]\, J_{-\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} r)}\}$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots),$$

wobei die $k_{0\varkappa}$ zu berechnen sind aus

$$[1, -\tfrac{1}{2}]\, J_{\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} R_2)} - [1, \tfrac{1}{2}]\, J_{-\frac{1}{2}(k_{0\varkappa} R_2)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Die Beispiele 2—4 bieten prinzipiell gegenüber dem Kreisgebiet nichts Neues. Es sei daher der Kürze halber gestattet, sich hier mit diesen knappen Angaben zu begnügen.

Eingegangen im Juli 1929.

Über unendliche diskrete Gruppen.

Von *Hertha Adelsberger* in Königsberg i. Pr.

$\mathfrak{G}$ sei eine unendliche diskrete Gruppe mit den Erzeugenden $S_1, S_2, \ldots, S_n$ und den definierenden Relationen

$$F_i(S_1, S_2, \ldots, S_n) = 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Wir wollen einige neue Eigenschaften der Gruppe angeben, die sich aus den definierenden Relationen ablesen lassen.

Bisher gilt dies nur für die Poincaréschen Zahlen. Diese kennzeichnen die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_1$ der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_1$. Nun kann man aber zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_l$ der höheren Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_l$ bilden. Die l-te Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_l$ wird erzeugt aus den Kommutatorelementen von irgendeinem Element aus $\mathfrak{G}$ mit irgendeinem Element der $(l-1)$-ten Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{l-1}$; und Eigenschaften von $\mathfrak{G}_l$ sind also auch Invarianten von $\mathfrak{G}$.

In §§ 1 und 2 betrachten wir die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{C}_2$ und konstruieren die neuen Invarianten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ nach folgendem Verfahren: Die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}_2$ sei $\mathfrak{C}_{21}$. Wir bilden den Durchschnitt $\mathfrak{D}_i$ von $\mathfrak{C}_{21}$ mit der Gruppe der $\frac{\pi_i}{2^{\nu}}$-ten Potenzen, wo π_i die i-te Poincarésche Zahl ist und ν_i angibt, wievielmal der Faktor 2 in π_i enthalten ist. Die Poincaréschen Zahlen der Faktorgruppen $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$ der Durchschnitte $\mathfrak{D}_i$ sind unsere Invarianten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ (§ 1, Abschn. 2). In § 1, Abschn. 3 folgt der rein formale Beweis, daß $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ Invarianten sind.

Sind $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ die Poincaréschen Zahlen von $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$ die Poincaréschen Zahlen von $\mathfrak{G}$, so sind

$$\frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{im})}, \frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{i,m-1})}, \ldots, \frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{i1})}$$

die Poincaréschen Zahlen des Durchschnitts $\mathfrak{D}_i$, was sich aus einem Satz von Steinitz beweisen läßt (§ 2, Abschn. 1).

Auch die Poincaréschen Zahlen des Zentrums sind durch die Poincaréschen Zahlen von $\mathfrak{G}$ und die von $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$ bestimmt (§ 2, Abschn. 2).

In § 2, Abschn. 3 untersuchen wir, wieweit die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ durch die Poincaréschen Zahlen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_l$ und die Invarianten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ gekennzeichnet ist. Hat die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ nur zwei Erzeugende und sind ihre beiden Poincaréschen Zahlen gleich, so ist sie durch ihre Poincarésche Zahl und die Poincarésche Zahl ihrer Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_1}$ vollständig bestimmt. Mit andern Worten, zwei Gruppen $\mathfrak{G}_2$ mit nur zwei Erzeugenden, von denen jede zwei gleiche Poincarésche Zahlen hat, sind einstufig isomorph, wenn ihre Poincaréschen Zahlen und die ihrer Faktorgruppen $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_1}$ dieselben sind (§ 2, Abschn. 3). Eine Gruppe $\mathfrak{G}_2$ mit zwei Erzeugenden und zwei definierenden Relationen, deren Poincarésche Zahlen verschieden sind, ist nicht durch ihre Poincaréschen Zahlen und die ihrer Faktorgruppen $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$ bestimmt, ebenfalls nicht eine Gruppe mit n Erzeugenden und n definierenden Relationen, deren sämtliche Poincarésche Zahlen gleich sind.

In § 3 wird die Gruppe $\mathfrak{G}_3$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit zwei Erzeugenden und zwei definierenden Relationen betrachtet.

§ 1.

1. Seien $S_1, S_2, \ldots, S_n$ die Erzeugenden einer Gruppe $\mathfrak{G}$ und

$$(1) \qquad F_i(S_1, S_2, \ldots, S_n) = S_1^{\varkappa_{i1}'} S_2^{\varkappa_{i2}'} \cdots S_n^{\varkappa_{in}'} S_1^{\varkappa_{i1}''} S_2^{\varkappa_{i2}''} \ldots = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

ihre definierenden Relationen.

Wir setzen

$$\varphi_j^i = \varkappa_{ij}' + \varkappa_{ij}'' + \varkappa_{ij}''' + \cdots$$
$$\varphi_{jl}^i = -\varkappa_{ij}'\varkappa_{il}' - \varkappa_{ij}'''(\varkappa_{il}' + \varkappa_{il}'') - \varkappa_{ij}^{(IV)}(\varkappa_{il}' + \varkappa_{il}'' + \varkappa_{il}''') - \cdots$$

Es seien die $\mu_1^m, \mu_2^m, \ldots, \mu_r^m$ zusammen mit den $\alpha_1^m, \alpha_2^m, \ldots, \alpha_n^m$ $(m = 1, 2, \ldots, r)$ r Systeme von ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{r} \mu_p \varphi_q^p = -\alpha_q \frac{\pi_i}{2^{\nu_i}} \qquad (q = 1, 2, \ldots, n),$$

wenn π_i die i-te Poincarésche Zahl von $\mathfrak{G}$ ist und ν_i angibt, wie oft der Faktor 2 in π_i enthalten ist. Ferner setzen wir

$$\overline{\varphi}_{jl}^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \mu_i^m (\varphi_{jl}^i - \varphi_j^i \varphi_l^i)$$

$$(3) \qquad \overline{\overline{\varphi}}_{jl}^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \mu_i^m (\varphi_{jl}^i - \varphi_j^i \varphi_l^i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \varphi_j^i \varphi_l^i \mu_i^m (\mu_i^m - 1) - \sum_{\substack{p,q=1 \\ p<q}}^{r} \mu_p^m \mu_q^m \varphi_i^q \varphi_k^p.$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Elementarteiler $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ der Matrizen $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$, welche > 1 sind, Invarianten von $\mathfrak{G}$ sind. Es ist

$$\mathfrak{M}_i = \left|\begin{array}{l}
\pi_i \;\; 0 \;\; \ldots\ldots\ldots\

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ wird ein Produkt erklärt durch die Festsetzung

$$(1 + s_i)(1 + s_k) = 1 + s_i + s_k + \frac{1}{2}(s_i s_k - s_k s_i)$$

oder allgemein

$$[1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + \frac{1}{2} \sum_{i<k} \alpha_{ik}(s_i s_k - s_k s_i)] [1 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i s_i + \frac{1}{2} \sum_{i<k} \beta_{ik}(s_i s_k - s_k s_i)] =$$

$$1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) s_i + \frac{1}{2} \sum_{i<k} (\alpha_{ik} + \beta_{ik} + \alpha_i \beta_k - \alpha_k \beta_i)(s_i s_k - s_k s_i).$$

Im folgenden wird der Kürze wegen statt des Ausdruckes $s_i s_k - s_k s_i$ stets s_{ik} geschrieben. Die Gesamtheit der Elemente

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + \frac{1}{2} \sum_{i<k} \alpha_{ik} s_{ik}$$

bilden eine Gruppe, wenn α_i, α_{ik} ganze Zahlen sind und $\alpha_{ik} \equiv \alpha_i \alpha_k \pmod 2$ ist. $1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i - \frac{1}{2} \sum_{i<k} \alpha_{ik} s_{ik}$ ist das zu $1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i s_i + \frac{1}{2} \sum_{i<k} \alpha_{ik} s_{ik}$ inverse Element. Wenn wir noch die Relationen

$$(4) \qquad 1 + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \varphi_{jk}^i s_{jk} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

hinzufügen, dann ist die so definierte Gruppe eine zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}_2$ von $\mathfrak{C}_2$ isomorphe (und also zu $\mathfrak{G}$ homomorphe) Gruppe.

a) Die Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{21}$ von $\mathfrak{G}$ hat die Erzeugenden $1 + s_{12}, 1 + s_{13}, \ldots, 1 + s_{1n}, 1 + s_{23}, \ldots, 1 + s_{n-1,n}$ und wegen

$$[1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i s_j + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \alpha_{jk}^i s_{jk}] [1 + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i s_j + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \varphi_{jk}^i s_{jk}]$$

$$[1 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i s_j - \frac{1}{2} \sum_{j<k} \alpha_{jk}^i s_{jk}]$$

$$= [1 + \sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i s_j + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \varphi_{jk}^i s_{jk}] [1 + s_{12}]^{\alpha_1^i \varphi_2^i - \alpha_2^i \varphi_1^i} [1 + s_{13}]^{\alpha_1^i \varphi_3^i - \alpha_3^i \varphi_1^i} \ldots$$

$$[1 + s_{jk}]^{\alpha_j^i \varphi_k^i - \alpha_k^i \varphi_j^i} \ldots [1 + s_{n-1,n}]^{\alpha_{n-1}^i \varphi_n^i - \alpha_n^i \varphi_{n-1}^i}$$

die Relationen

$$(5) \qquad 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^i s_{lk} = 1 \qquad \begin{matrix}(l = 1, 2, \ldots, n) \\ (i = 1, 2, \ldots, r).\end{matrix}$$

Sämtliche Folgerelationen der Relationen (4) kann ich als Produkte aus den Relationen (4) und (5) schreiben.

b) Wir bilden ferner die π_i-ten Potenzen sämtlicher Elemente von $\mathfrak{G}_2$, wo π_i die i-te Poincarésche Zahl der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ ist. Sämtliche π_i-ten Potenzen kann ich darstellen durch den Ausdruck

$$(6) \qquad 1 + \sum_{l=1}^{n} \pi_i \alpha_l s_l + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \pi_i \alpha_{jk} s_{jk},$$

wo $\alpha_{jk} \equiv \alpha_j \alpha_k \pmod 2$ ist. Die Elemente (6) bilden eine Gruppe, wenn π_i ungerade ist. Ist π_i gerade, so bilden die $\frac{\pi_i}{2^{\nu_i}}$-ten Potenzen eine Gruppe, wo ν_i angibt, wievielmal

der Faktor 2 in π_i enthalten ist. Bilden wir nämlich das Produkt zweier π_i-ten Potenzen, so muß dieses wieder eine π_i-te Potenz sein. Es ist

$$[1 + \sum_{l=1}^{n} \pi_i \alpha_l s_l + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \pi_i \alpha_{jk} s_{jk}] [1 + \sum_{l=1}^{n} \pi_i \beta_l s_l + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \pi_i \beta_{jk} s_{jk}]$$

$$= 1 + \sum_{l=1}^{n} \pi_i (\alpha_l + \beta_l) s_l + \frac{1}{2} \sum_{j<k} \pi_i (\alpha_{jk} + \beta_{jk} + \pi_i \alpha_j \beta_k - \pi_i \alpha_k \beta_j) s_{jk}.$$

Wenn die rechte Seite dieser Gleichungen wieder eine π_i-te Potenz sein soll, so muß

$$\alpha_{jk} + \beta_{jk} + \pi_i \alpha_j \beta_k - \pi_i \alpha_k \beta_j \equiv (\alpha_j + \beta_j)(\alpha_k + \beta_k) \pmod 2$$

sein, oder

$$\alpha_{jk} + \beta_{jk} + \pi_i \alpha_j \beta_k - \pi_i \alpha_k \beta_j \equiv \alpha_j \alpha_k + \alpha_j \beta_k + \beta_j \beta_k + \beta_j \alpha_k \pmod 2.$$

Das ist der Fall, wenn π_i ungerade ist, denn es ist dann

$$\alpha_{jk} \equiv \alpha_j \alpha_k \pmod 2 \text{ und } \beta_{jk} \equiv \beta_j \beta_k \pmod 2$$

und

$$\pi_i \alpha_j \beta_k \equiv \alpha_j \beta_k \pmod 2$$
$$\pi_i \alpha_k \beta_j \equiv \alpha_k \beta_j \pmod 2.$$

Da $\frac{\pi_i}{2^{r_i}}$ stets ungerade ist, so bilden die $\frac{\pi_i}{2^{r_i}}$-ten Potenzen immer eine Gruppe, was sich leicht entsprechend zeigen läßt. Wir wollen im folgenden voraussetzen, daß π_i ungerade ist.

c) Wir bilden schließlich den Durchschnitt $\mathfrak{D}_i$ der Gruppe der π_i-ten Potenzen mit der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{21}$. Um die Elemente von $\mathfrak{D}_i$ zu erhalten, muß man in (6) die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ so wählen, daß die durch (6) dargestellten Elemente durch Multiplikation mit den Relationen (4) in die Form

$$1 + \sum_{j<k} \gamma_{jk} s_{jk} \tag{7}$$

gebracht werden können. Es müssen sich solche $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ aus den Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{r} \mu_p \varphi_l^p = -\alpha_l \pi_i \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

bestimmen lassen, daß sich die durch (6) dargestellten Elemente durch Multiplikation mit den Relationen

$$1 - \sum_{l=1}^{n} \mu_p \varphi_l^p s_l - \frac{1}{2} \sum_{j<k} \mu_p \varphi_{jk}^p s_{jk} \qquad (p = 1, 2, \ldots, r) \tag{9}$$

in die Form (7) bringen lassen. Sind umgekehrt die $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ Lösungen der Gleichungen (8), so sind die Elemente (6) Elemente aus $\mathfrak{D}_i$.

d) Aus (8) lassen sich die Erzeugenden von $\mathfrak{D}_i$ ablesen. Unser System (8) von Gleichungen hat $r + n$ Unbekannte und die Koeffizientenmatrix hat den Rang n; dann gibt es Systeme von r und nicht weniger Fundamentalauflösungen, aus denen alle andern linear, homogen und ganzzahlig zusammengesetzt sind.

$$\mu_p^m, \alpha_l^m \qquad \begin{matrix}(p = 1, 2, \ldots, r;\ l = 1, 2, \ldots, n) \\ (m = 1, 2, \ldots, r)\end{matrix}$$

seien die r Lösungssysteme. Zum Durchschnitt $\mathfrak{D}_i$ gehören also gerade alle Elemente (6), deren

$$\alpha_i = \sum_{m=1}^{r} \lambda_m \alpha_l^m$$

sind, also die Elemente

$$1 + \sum_{l=1}^{n}\left(\pi_i \sum_{m=1}^{r} \lambda_m \alpha_l^m\right) s_l + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \pi_i \alpha_{jk} s_{ik},$$

wo die α_l^m Fundamentalauflösungen sind. Der Durchschnitt wird mit andern Worten erzeugt durch

$$T_m = 1 + \sum_{l=1}^{n} \pi_i \alpha_l^m s_l + \frac{1}{2}\sum_{j<k} \pi_i^2 \alpha_j^m \alpha_k^m s_{jk} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{10}$$

$$1 + \pi_i s_{jk} \quad (j, k = 2, 3, \ldots, n;\ j < k).$$

Wegen der Gleichungen (8) kann ich

$$\alpha_l^m = -\frac{1}{\pi_i}\sum_{p=1}^{r} \mu_p^m \varphi_l^p \quad (l = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots, r)$$

setzen, dann erhalte ich die Erzeugenden (10) in der Gestalt

$$T_m = 1 + \sum_{l=1}^{n}\sum_{p=1}^{r} \mu_p \varphi_l^p s_l - \frac{1}{2}\sum_{j<k}\left(\sum_{p=1}^{r} \mu_p^m \varphi_j^p \cdot \sum_{p=1}^{r} \mu_p^m \varphi_k^m\right) s_{jk}$$

$$(m = 1, 2, \ldots r)$$

$$1 + \pi_i s_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots, n;\ j < k).$$

Wir multiplizieren die Erzeugenden T_m bzw. mit den Folgerelationen $F_1^{\mu_1^m} F_2^{\mu_2^m} \cdots F_r^{\mu_r^m}$, so wird

$$T_m = T_m \cdot F_1^{\mu_1^m} F_2^{\mu_2^m} \cdots T_r^{\mu_r^m} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} \overline{\varphi}_{1l}^m s_{1l} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,l=2 \\ j<l}}^{n} \overline{\overline{\varphi}}_{jl}^m s_{jl} \tag{10a}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, r),$$

wo die $\overline{\varphi}_{1l}^m$ und $\overline{\overline{\varphi}}_{jl}^m$ durch die Gleichungen (3) erklärt sind.

e) Nun haben wir aber auch die Relationen und Erzeugenden von $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}_i$ ist eine Untergruppe der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{21}$, und weil $\mathfrak{C}_{21}$ abelsch ist, eine invariante Untergruppe. Ich kann also die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$ bilden. $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$ hat dieselben Erzeugenden wie $\mathfrak{C}_{21}$, also $1 + s_{12}$, $1 + s_{13}$, …, $1 + s_{n-1,n}$, und ich erhalte die Relationen von $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$, wenn ich zu den Relationen (5) der Kommutatorgruppe noch die Relationen hinzufüge, die ich erhalte, wenn ich die Erzeugenden von $\mathfrak{D}_i$ gleich 1 setze. Also

$$T_m = 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)$$

$$1 + \pi_i s_{jk} = 1 \qquad (j, k = 2, 3, \ldots, n;\ j < k).$$

Die Poincaréschen Zahlen von $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$ sind offenbar die Elementarteiler der Matrix $\mathfrak{M}_i$, also unsere Invarianten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$.

3. Jetzt wollen wir die Zahlen $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ dadurch als Gruppeninvarianten kennzeichnen, daß wir zeigen, daß sie sich bei Erweiterungen und Reduktionen erster und zweiter Art nicht ändern.

Eine Erweiterung erster Art besteht im Hinzufügen einer Folgerelation zu den Relationen (1). Wir unterscheiden dabei zwei Fälle. Einmal fügen wir zu den Relationen (1) eine Relation hinzu, die invers ist zu einer der ursprünglichen Relationen, etwa zu

$F_1 = 1$. Nach unserem in Abschn. 1 angegebenen Verfahren können wir aus dem erweiterten Relationensystem eine Matrix $\mathfrak{M}_i^*$ herleiten, die wir durch folgende Änderungen aus der Matrix $\mathfrak{M}_i$ erhalten. Der erste Teil der Matrix $\mathfrak{M}_i$ bleibt ungeändert, denn die Poincaréschen Zahlen ändern sich nicht bei Erweiterungen erster Art. Den zweiten Teil der Matrix $\mathfrak{M}_i^*$ erhalten wir, wenn wir zum zweiten Teil der Matrix $\mathfrak{M}_i$ die Zeilen

$$\begin{array}{llllllllllllllllllllllllllll}
-\varphi_2^1 & -\varphi_3^1 & -\varphi_4^1 & \ldots & -\varphi_n^1 & 0 & 0 & \ldots & & & & & & & & & & & & & & & & 0 \\
\varphi_1^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\varphi_3^1 & -\varphi_4^1 & \ldots & -\varphi_n^1 & 0 & \ldots & & & & & & & & & & & & & 0 \\
0 & \varphi_1^1 & 0 & \ldots & 0 & \varphi_2^1 & 0 & \ldots & 0 & -\varphi_4^1 & -\varphi_5^1 & \ldots & -\varphi_n^1 & \ldots & & & & & & & & & & 0 \\
\ldots & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \ldots & \ldots & -\varphi_n^1 & 0 & 0 & \ldots & -\varphi_2^1 & 0 & \ldots & \ldots & -\varphi_3^1 & \ldots & \ldots & & & & & & & & & 0
\end{array}$$

hinzufügen. Durch das Hinzufügen dieser Zeilen ändern sich die Elementarteiler der Matrix $\mathfrak{M}_i$ nicht, denn diese Zeilen kommen mit umgekehrten Vorzeichen bereits in der Matrix $\mathfrak{M}_i$ vor, und wir können sie also durch Zeilenaddition wieder fortschaffen. Im dritten Teil treten in der Matrix $\mathfrak{M}_i^*$ an die Stelle der Zahlen $\bar{\varphi}_{jl}^m$ und $\bar{\bar{\varphi}}_{jl}^m$ die Zahlen $\bar{\psi}_{jl}^m$ und $\bar{\bar{\psi}}_{jl}^m$, die durch die Gleichungen

$$(11) \qquad \bar{\psi}_{jl}^m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \bar{\mu}_i^m(\varphi_{jl}^i - \varphi_j^i \varphi_l^i) + \frac{1}{2}\bar{\mu}_{r+1}^m(-\varphi_{jl}^1 - \varphi_j^1 \varphi_l^1)$$

und

$$\begin{aligned}(12) \qquad \bar{\bar{\psi}}_{jl}^m = {} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \bar{\mu}_i^m(\varphi_{jl}^i - \varphi_j^i \varphi_l^i) + \frac{1}{2}\bar{\mu}_{r+1}^m(-\varphi_{jl}^1 - \varphi_j^1 \varphi_l^1) \\ & - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \varphi_j^i \varphi_l^i \bar{\mu}_i^m(\bar{\mu}_i^m - 1) - \frac{1}{2}\varphi_j^1 \varphi_l^1 \bar{\mu}_{r+1}^m(\bar{\mu}_{r+1}^m - 1) \\ & - \sum_{p,q=1}^{r} \bar{\mu}_p^m \bar{\mu}_q^m \varphi_j^q \varphi_k^p - \sum_{q=1}^{r} \bar{\mu}_{r+1}^m \bar{\mu}_q^m \varphi_j^1 \varphi_k^q\end{aligned}$$

bestimmt sind, wobei die $\bar{\mu}_1^m, \bar{\mu}_2^m, \ldots, \bar{\mu}_r^m, \bar{\mu}_{r+1}^m$ zusammen mit den $\alpha_1^m, \alpha_2^m, \ldots, \alpha_n^m$ $(m = 1, 2, \ldots, r)$ r Systeme von ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{r} \bar{\mu}_p \varphi_l^p - \bar{\mu}_{r+1}\varphi_l^1 = -\alpha_l \pi_i \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

sind, die wir auch auf folgende Weise schreiben können

$$(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_{r+1})\varphi_l^1 + \sum_{p=2}^{r} \bar{\mu}_p \varphi_l^p = -\alpha_l \pi_i \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzen wir

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_{r+1} = \mu_1 \\ &\bar{\mu}_p = \mu_p \quad (p = 2, 3, \ldots, r), \end{aligned}$$

so erhalten wir die Gleichungen (2). Ersetzen wir jetzt mit Hilfe der Gleichungen (13) in den Gleichungen (11) und (12) die $\bar{\mu}_1^m, \bar{\mu}_2^m, \ldots, \bar{\mu}_r^m$ durch die $\mu_1^m, \mu_2^m, \ldots, \mu_r^m, \bar{\mu}_{r+1}^m$, so gehen die $\bar{\psi}_{jl}^m$ und $\bar{\bar{\psi}}_{jl}^m$ in Ausdrücke über, die sich mit Hilfe von Zeilenadditionen in die $\bar{\varphi}_{jl}^m$ und $\bar{\bar{\varphi}}_{jl}^m$ überführen lassen. Damit ist gezeigt, daß sich die Elementarteiler $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ der Matrix $\mathfrak{M}_i$ bei dieser Art der Erweiterung nicht ändern.

Die zweite Art von Folgerelationen, die wir zu den Relationen (1) hinzufügen, hat die Form

$$L_1 T_{i_1} L_2 T_{i_2} \cdots T_{i_r} L_{r+1} = 1.$$

Nach einer Bemerkung in Abschn. 2 a ist die linke Seite dieser Gleichung ein Produkt aus den Relationen (4) und (5), also gleich

$$\prod_{i=1,2,\ldots,r}[1+\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^k s_j+\frac{1}{2}\sum_{j<l}\varphi_{jl}^k s_{jl}]^{\nu_i}[1+\sum_{j<l}(\lambda_j^k\varphi_l^k-\lambda_l^k\varphi_j^k)s_{jl}],$$

wo die ν_i, λ_j^k und λ_l^k beliebige ganze Zahlen sind.

Aus dem erweiterten Relationensystem leiten wir eine Matrix $\mathfrak{M}_i^{**}$ ab. Um aus der Matrix $\mathfrak{M}_i$ die Matrix $\mathfrak{M}_i^{**}$ zu erhalten, müssen wir zum zweiten Teil von $\mathfrak{M}_i$ einige Zeilen hinzufügen, die nur Zahlen enthalten, welche lineare Formen der φ_j^i sind. Diese Zeilen können durch Zeilenaddition wieder fortgeschafft werden. Ferner treten im dritten Teil von $\mathfrak{M}_i^{**}$ an die Stelle der Zahlen $\overline{\varphi}_{jl}^m$ und $\overline{\overline{\varphi}}_{jl}^m$ die Zahlen $\bar{\chi}_{jl}^m$ und $\bar{\bar{\chi}}_{jl}^m$, die in diesem Falle durch die Gleichungen

$$(14)\quad \bar{\chi}_{jl}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\bar{\mu}_i^m(\varphi_{jl}^i-\varphi_j^i\varphi_l^i)+\frac{1}{2}\bar{\mu}_{r+1}^m\sum_{i=1}^{r}\nu_i(\varphi_{jl}^i-\varphi_j^i\varphi_l^i)+\sum_{i=1}^{r}(\lambda_j^i\varphi_l^i-\lambda_l^i\varphi_j^i)$$

$$\bar{\bar{\chi}}_{jl}^m=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\bar{\mu}_i^m(\varphi_{lj}^i-\varphi_j^i\varphi_l^i)+\frac{1}{2}\bar{\mu}_{r+1}^m\sum_{i=1}^{r}\nu_i(\varphi_{jl}^i-\varphi_j^i\varphi_l^i)+\sum_{i=1}^{r}(\lambda_j^i\varphi_l^i-\lambda_l^i\varphi_j^i)$$

$$(15)\quad -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\varphi_j^i\varphi_l^i\bar{\mu}_i^m(\bar{\mu}_i^m-1)-\frac{1}{2}\bar{\mu}_{r+1}^m(\bar{\mu}_{r+1}^m-1)\sum_{i=1}^{r}\nu_i\varphi_j^i\sum_{i=1}^{r}\nu_i\varphi_l^i$$

$$-\sum_{p,q=1}^{r}\bar{\mu}_p^m\bar{\mu}_q^m\varphi_j^m\varphi_l^m-\sum_{q=1}^{r}\bar{\mu}_{r+1}^m\bar{\mu}_q^m\varphi_l^q\sum_{i=1}^{r}\nu_i\varphi_j^i$$

bestimmt sind, wo die ν_i beliebige ganze Zahlen, und die $\bar{\mu}_1^m, \bar{\mu}_2^m, \ldots, \bar{\mu}_r^m, \bar{\mu}_{r+1}^m$ zusammen mit den $\alpha_1^m, \alpha_2^m, \ldots, \alpha_r^m$ r Systeme von ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{r}\bar{\mu}_p\varphi_l^p+\bar{\mu}_{r+1}\sum_{p=1}^{r}\nu_p\varphi_l^p=-\alpha_1\pi_i\qquad(l=1,2,\ldots,n)$$

sind. Setzen wir

$$(16)\qquad \bar{\mu}_p+\bar{\mu}_{r+1}\nu_p=\mu_p\qquad(p=1,2,\ldots,r),$$

so erhalten wir die Gleichungen (2). Ersetzen wir jetzt mit Hilfe von (16) in (14) und (15) die $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \ldots, \bar{\mu}_r$ durch die $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r, \bar{\mu}_{r+1}$, so gehen die $\bar{\chi}_{jl}^m$ und $\bar{\bar{\chi}}_{jl}^m$ in Ausdrücke über, die sich durch Zeilenaddition in die entsprechenden $\overline{\varphi}_{jl}^m$ und $\overline{\overline{\varphi}}_{jl}^m$ überführen lassen. Damit ist wieder gezeigt, daß sich die $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ auch bei dieser Erweiterung nicht ändern.

Bei einer Erweiterung zweiter Art tritt zu dem ursprünglichen System eine neue Erzeugende S_{n+1} und eine Relation

$$S\,S_{n+1}=1$$

hinzu, wo S ein beliebiges Element ist, das aus $S_1, S_2, \ldots, S_n$ erzeugt ist. Gehen wir zu der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ über, so tritt hier bei einer Erweiterung zweiter Art eine Erzeugende $1+s_{n+1}$ und eine Relation

$$(1+s)(1+s_{n+1})=1$$

hinzu, wo

$$1+s=1+\sum_{j=1}^{n}\beta_j s_j+\frac{1}{2}\sum_{j<l}\beta_{jl}s_{jl}$$

ist. Wir erhalten also die neue Relation

$$1+\sum_{j=1}^{n}\beta_j s_j+s_{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{j<l}\beta_{jl}s_{jl}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\beta_j s_{j,n+1}=1.$$

Die Invarianten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ berechnen wir in diesem Falle aus der Matrix $\mathfrak{M}_i^{***}$, die wir durch zwei Änderungen aus der Matrix $\mathfrak{M}_i$ erhalten. Wir fügen erstens einige Zeilen und Spalten zu $\mathfrak{M}_i$ hinzu. Die neuen Spalten enthalten nur in einer Zeile von Null und Eins verschiedene Zahlen. Diese Zeile kann durch Zeilenaddition fortgeschafft werden. Durch die andern Zeilen und Spalten treten zu den Elementarteilern von $\mathfrak{M}_i$ nur solche hinzu, die gleich Eins sind; denn jede der neuen Spalten enthält lauter Nullen außer einer Eins in einer der neuen Zeilen; und zwar steht in jeder der neuen Zeilen nur eine Eins. Die Elementarteiler von $\mathfrak{M}_i$, die > 1 sind, werden also nicht geändert. Zweitens treten an die Stelle der $\overline{\varphi}_{jl}^m$ und $\overline{\overline{\varphi}}_{jl}^m$ die Zahlen $\overline{\omega}_{jl}^m$ und $\overline{\overline{\omega}}_{jl}^m$, die durch die Gleichungen

$$\overline{\omega}_{jl}^m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \overline{\mu}_i^m (\varphi_{jl}^i - \varphi_j^i \varphi_l^i) + \frac{1}{2}\overline{\mu}_{r+1}^m (\beta_{lj} - \beta_j \beta_l)$$

$$\overline{\overline{\omega}}_{jl}^m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \overline{\mu}_i^m (\varphi_{jl}^i - \varphi_j^i \varphi_l^i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \varphi_j^i \varphi_j^i \overline{\mu}_i^m (\overline{\mu}_i^m - 1) - \sum_{\substack{p,q=1 \\ p<q}}^{r} \overline{\mu}_p^m \overline{\mu}_q^m \varphi_j^q \varphi_l^p$$

$$+ \frac{1}{2}\overline{\mu}_{r+1}^m (\beta_{jl} - \beta_j \beta_l) - \frac{1}{2}\beta_j \beta_l \overline{\mu}_{r+1}^m (\overline{\mu}_{r+1}^m - 1) - \sum_{q=1}^{r} \overline{\mu}_{r+1}^m \overline{\mu}_q^m \beta_j \varphi_l^q$$

erklärt sind, wobei die $\overline{\mu}_1^m, \overline{\mu}_2^m, \ldots, \overline{\mu}_r^m, \overline{\mu}_{r+1}^m$ zusammen mit den $\alpha_1^m, \alpha_2^m, \ldots, \alpha_n^m$ r Systeme von ganzzahligen Lösungen der Gleichungen

$$\sum_{p=1}^{r} \overline{\mu}_p \varphi_l^p + \overline{\mu}_{r+1}\beta_l = -\alpha_l \pi_i \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\overline{\mu}_{r+1} = -\alpha_{n+1}\pi_i$$

sind. Mit Hilfe der letzten Gleichung kann ich die andern umformen:

$$\sum_{p=1}^{r} \overline{\mu}_p \varphi_l^p = -\pi_i (\alpha_l + \alpha_{n+1}\beta_l) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese Gleichungen haben dieselben Lösungen wie die Gleichungen (2), also sind die $\overline{\mu}_i^m = \mu_i^m$ zu setzen. Die Summanden, durch die sich die $\overline{\omega}_{jl}^m$ und $\overline{\overline{\omega}}_{jl}^m$ von den $\overline{\varphi}_{jl}^m$ und $\overline{\overline{\varphi}}_{jl}^m$ unterscheiden, sind alle Vielfache von π_i, da $\overline{\mu}_{r+1} = \alpha_{n+1}\pi_i$ zu setzen ist. $\frac{1}{2}\beta_j\beta_l\overline{\mu}_{r+1}(\overline{\mu}_{r+1} - 1)$ ist ebenfalls ein Vielfaches von π_i, da wir π_i ungerade vorausgesetzt haben. Wir können diese Glieder dadurch fortschaffen, daß wir Vielfache von Zeilen, in denen nur π_i steht, zu den betreffenden Zeilen addieren. Die $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ sind auch bei der Erweiterung zweiter Art unverändert geblieben.

Damit haben wir gezeigt, daß die $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ Gruppeninvarianten sind, denn wenn sie sich bei Erweiterungen erster oder zweiter Art nicht ändern, so ändern sie sich natürlich auch nicht bei Reduktionen erster oder zweiter Art.

4. Wir wollen noch eine vereinfachte Darstellung der η_{ik} ableiten. Die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ war bisher gegeben durch die Erzeugenden $1 + s_1, 1 + s_2, \ldots, 1 + s_n$ und die definierenden Relationen (4). Es lassen sich neue Erzeugende $1 + \bar{s}_1, 1 + \bar{s}_2, \ldots, 1 + \bar{s}_n$ einführen und solche Folgerelationen bilden, daß wir für sie die neuen Relationen

$$(17) \qquad 1 + \pi_i \bar{s}_i + \sum_{j<l} \pi_{jl}^i \bar{s}_{jl} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

erhalten. Die $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ sind die Elementarteiler der Matrix, die aus den Zahlen φ_j^i gebildet ist. Der Einfachheit halber möge weiterhin nur der Fall betrachtet werden,

daß (17) ein System von definierenden Relationen von $\mathfrak{G}_2$ ist. Im folgenden will ich die Querstriche wieder fortlassen. Wegen

$$[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j s_j+\frac{1}{2}\sum_{j<l}\alpha_{jl}s_{jl}]\,[1+\pi_i s_i+\sum_{j<l}\pi_{jl}^{i}s_{jl}]\,[1-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j s_j-\frac{1}{2}\sum_{j<l}\alpha_{jl}s_{jl}]$$
$$=[1+\pi_i s_i+\sum_{j<l}\pi_{jl}^{i}s_{jl}]\,[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\pi_i s_{ji}]$$

kann ich alle Folgerelationen von (17) als Produkte von

$$1+\pi_i s_i+\sum_{j<l}\pi_{jl}^{i}s_{jl} \qquad \text{und}$$
$$1+\pi_i s_{ji} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

darstellen. Da die $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ Elementarteiler sind, ist π_i stets ein ganzes Vielfaches von π_{i-1}. Die Relation $1+\pi_i s_{li}=1$, wo $l<i$ ist, ist also eine Folgerelation von $1+\pi_l s_{li}=1$. Wir können daher alle Relationen darstellen als Produkte aus

$$1+\pi_i s_i+\sum_{j<l}\pi_{jl}^{i}s_{jl} \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$
$$1+\pi_j s_{ji} \qquad (i=1,2,\ldots,r;\ j=1,2,\ldots,i-1)$$
$$1+\pi_i s_{ji} \qquad (i=1,2,\ldots,r;\ j=i+1,i+2,\ldots,n).$$

Wir setzen wieder voraus, daß π_i ungerade ist, und bilden die π_i-ten Potenzen sämtlicher Elemente:

$$1+\sum_{j=1}^{n}\pi_i\alpha_j s_j+\frac{1}{2}\sum_{j<l}\pi_i\alpha_{jl}s_{jl}. \tag{18}$$

Diese bilden eine Gruppe $\mathfrak{H}_i$. Ich bilde den Durchschnitt $\mathfrak{D}_i$ von $\mathfrak{H}_i$ mit der Kommutatorgruppe. Um die Elemente von $\mathfrak{D}_i$ zu erhalten, multipliziere ich (18) mit

$$\prod_{k=1,2,\ldots,r}[1-\mu_k\pi_k s_k-\sum_{j<l}\mu_k\pi_{jl}^{k}s_{jl}]. \tag{19}$$

Es lassen sich solche $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ aus den Gleichungen

$$\mu_k\pi_k=-\alpha_k\pi_i \qquad (k=1,2,\ldots,r) \tag{20}$$
$$\alpha_k\pi_i=0 \qquad (k=r+1,r+2,\ldots,n)$$

bestimmen, daß (18) durch Multiplikation mit (19) in die Form

$$1+\sum_{j<l}\gamma_{jl}s_{jl}$$

gebracht werden kann. Wir erhalten als Lösungen von (20)

$$\mu_k=\mu_k^*\frac{\pi_i}{\pi_k} \qquad (k=1,2,\ldots,i).$$

Die $\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_i^*$ sind beliebige ganze Zahlen, ebenfalls die $\mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \ldots, \mu_r$. Daraus folgt

$$\alpha_k=\mu_k^* \qquad (k=1,2,\ldots,i)$$
$$\alpha_k=\frac{\mu_k\pi_k}{\pi_i} \qquad (k=i+1,i+2,\ldots,r)$$
$$\alpha_k=0 \qquad (k=r+1,r+2,\ldots,n).$$

Die Elemente

$$1+\sum_{k=1}^{i}\pi_i\mu_k^* s_k+\sum_{k=i+1}^{r}\pi_k\mu_k s_k+\frac{1}{2}\sum_{\substack{j,l=1\\ j<l}}^{n}\pi_i\alpha_{jl}s_{jl}$$

bilden also den Durchschnitt $\mathfrak{D}_i$ und werden erzeugt durch

$$1 + \pi_i s_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, i)$$
$$1 + \pi_k s_k \qquad (k = i+1, i+2, \ldots, r)$$
$$1 + \pi_i s_{jl} \qquad (j, l = i+1, i+2, \ldots, n;\ j < l)\,.$$

Diese Erzeugenden können durch Multiplikation mit Folgerelationen von (17) in folgende Gestalt gebracht werden:

$$T_k = 1 + \pi_i s_k = 1 - \sum_{j<l} \pi_{jl}^k \frac{\pi_i}{\pi_k} s_{ji} \qquad (k = 1, 2, \ldots, i)$$

$$T_k = 1 + \pi_k s_k = 1 - \sum_{j<j} \pi_{jl}^k s_{jl} \qquad (k = i+1, i+2, \ldots, r)$$

$$T_{jl} = 1 + \pi_i s_{jl} \qquad (j, l = i+1, i+2, \ldots, n;\ j < l).$$

Ich bilde die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$. Diese hat die Erzeugenden $1 + s_{12}, 1 + s_{13}, \ldots, 1 + s_{n-1,n}$. Ich erhalte die Relationen von $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$, wenn ich zu den Relationen der Kommutatorgruppe

$$1 + \pi_j s_{jl} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r;\ l = 2, 3, \ldots, n;\ j < l)$$

noch die Relationen

$$T_k = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$
$$T_{jl} = 1 \qquad (j, l = i+1, i+2, \ldots, n;\ j < l)$$

hinzufüge, die ich erhalte, wenn ich die Erzeugenden von $\mathfrak{D}_i$ gleich 1 setze. Die Poincaréschen Zahlen von $\frac{\mathfrak{C}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$ sind die Invarianten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$. Wir erhalten sie als Elementarteiler der Matrix

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & 0 & \pi_i\ 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & 0\ \pi_i\ 0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & 0 & \pi_i \\
\pi_1 & 0 & 0\,\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & 0 \\
0 & \pi_1 & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdots & \pi_1 & 0 & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & 0 \\
0 & \cdot & \cdots & 0 & \pi_2 & 0\,\cdot & 0 & \cdots & \cdot & \cdots & & 0 \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & \pi_2\,0\,\cdot & 0 & \cdots & \cdot & \cdots & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots 0 & \pi_2 & 0\,\cdot & \cdot & \cdots & & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & \cdot \\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots 0 & \pi_{i-1} & 0\ \cdots & & 0 \\
\frac{\pi_i}{\pi_1} & \pi_{13}^1 \frac{\pi_i}{\pi_1} & \cdots & \pi_{1n}^1 \frac{\pi_i}{\pi_1} & \pi_{23}^1 \frac{\pi_i}{\pi_1} & \cdots & \pi_{2n}^1 \frac{\pi_i}{\pi_1} & \cdots & \pi_{i-1,n}^1 \frac{\pi_i}{\pi_1} & \cdots & \pi_{n-1,n}^1 & \frac{\pi_i}{\pi_1} \\
\frac{\pi_i}{\pi_2} & \pi_{13}^2 \frac{\pi_i}{\pi_2} & \cdots & \pi_{1n}^2 \frac{\pi_i}{\pi_2} & \pi_{23}^2 \frac{\pi_i}{\pi_2} & \cdots & \pi_{2n}^2 \frac{\pi_i}{\pi_2} & \cdots & \pi_{i-1,n}^2 \frac{\pi_i}{\pi_2} & \cdots & \pi_{n-1,n}^2 & \frac{\pi_i}{\pi_2} \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & & \cdot \\
\frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} & \pi_{13}^{i-1} \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} & \cdots & \pi_{1n}^{i-1} \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} & \pi_{23}^{i-1} \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} & \cdots & \pi_{2n}^{i-1} \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} & \cdots & \pi_{i-1,n}^{i-1} \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} & \cdots & \pi_{n-1,n}^{i-1} & \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}} \\
 & \pi_{13}^i & \cdots & \pi_{1n}^i & \pi_{23}^i, & \cdots & \pi_{2n}^i & \cdots & \pi_{i-1,n}^i & \cdots & \pi_{n-1,n}^i & \\
 & \pi_{13}^{i+1} & \cdots & \pi_{1n}^{i+1} & \pi_{23}^{i+1} & \cdots & \pi_{2n}^{i+1} & \cdots & \pi_{i-1,n}^{i+1} & \cdots & \pi_{n-1,n}^{i+1} & \\
 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot & \\
 & \pi_{13}^r & \cdots & \pi_{1n}^r & \pi_{23}^r & \cdots & \pi_{2n}^r & \cdots & \pi_{i-1\,n}^r & \cdots & \pi_{n-1,n}^r &
\end{array}$$

§ 2.

1. Wir wollen beweisen, daß $\frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{im})}, \frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{i,m-1})}, \ldots, \frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{i1})}$ die Poincaréschen Zahlen des Durchschnitts $\mathfrak{D}_i$ sind, daß uns also die Poincaréschen Zahlen von $\mathfrak{D}_i$ keine neue Invarianten von $\mathfrak{G}$ liefern.

Beim Beweise benutzen wir folgenden Satz von Steinitz [1]) über die Lösungen linearer Kongruenzen. Gegeben ist ein System linearer Kongruenzen

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \equiv 0 \pmod{\varepsilon} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

dessen Koeffizientenmatrix die Elementarteiler $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ hat, dann haben die Matrizen sämtlicher Lösungssysteme die Elementarteiler $\frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \zeta_n)}, \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \zeta_{n-1})}, \ldots, \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \zeta_1)}$. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}_i$ hat, wie eben gezeigt worden ist, die Erzeugenden

$$T_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r) \quad \text{und}$$
$$T_{jl} \quad (j, l = i+1, i+2, \ldots, n;\ j < l).$$

Die Relationen von $\mathfrak{D}_i$ haben dann die Form

$$(21) \qquad T_1^{x_1} T_2^{x_2} \ldots T_r^{x_r} T_{i+1,i+2}^{x_{i+1,i+2}} T_{i+1,i+3}^{x_{i+1,i+3}} \ldots T_{n-1,n}^{x_{n-1,n}} = 1,$$

wobei die $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{i+1,i+2}, x_{i+1,i+3}, \ldots, x_{n-1,n}$ so zu bestimmen sind, daß die linke Seite der Gleichung (21) identisch gleich 1 wird, wenn wir sie mit den Relationen der Kommutatoruppe multiplizieren. Wir berechnen die $x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{i+1,i+2}, x_{i+1,i+3}, \ldots, x_{n-1,n}$ aus den Gleichungen

$$(22) \quad \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{i} \pi_{jl}^k \frac{\pi_i}{\pi_k} x_k + \sum_{k=i+1}^{r} \pi_{jl}^k x_k = \lambda_{jl} \pi_j \quad (j = 1, 2, \ldots, i;\ l = 2, 3, \ldots, n;\ j < l) \\ &\sum_{k=1}^{i} \pi_{jl}^k \frac{\pi_i}{\pi_k} x_k + \sum_{k=i+1}^{r} \pi_{jl}^k x_k + \pi_i x_{jl} = \lambda_{jl} \pi_j \ (j, l = i+1, i+2, \ldots, n;\ j < l), \end{aligned}$$

wo die λ_{pq} beliebige ganze Zahlen sind. Wir können die $\lambda_{pq} (p > i,\ q > i)$ gleich Null setzen, da die $\pi_p (p > i)$ Vielfache von π_i sind. Unser System hat dann $\frac{n(n-1)}{2} + r$ Unbekannte, und die Koeffizientenmatrix habe den Rang d, dann gibt es bekanntlich Systeme von $\frac{n(n-1)}{2} + r - d$ und nicht weniger Fundamentalauflösungen, aus denen alle andern linear, homogen, ganzzahlig zusammengesetzt sind.

Den Gleichungen (22) kann man auch folgende Form geben:

$$\sum_{k=1}^{i} \pi_{jl}^k \frac{\pi_i}{\pi_k} x_k + \sum_{k=i+1}^{r} \pi_{jl}^k x_k - \lambda_{jl} \pi_j \equiv 0 \pmod{\pi_i}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, i-1;\ l = 2, 3, \ldots, n;\ j < l)$$
$$\sum_{k=1}^{i} \pi_{jl}^k \frac{\pi_i}{\pi_k} x_k + \sum_{k=i+1}^{r} \pi_{jl}^k x_k \equiv 0 \pmod{\pi_i}$$
$$(j, l = i, i+1, \ldots, n;\ \ j < l).$$

Die Elementarteiler der Koeffizientenmatrix sind identisch mit den Poincaréschen Zahlen der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}_{21}}{\mathfrak{D}_i}$, also gleich $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$. Dann haben sämtliche Lösungs-

[1]) *E. Steinitz*, Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung **5** (1898), S. 87.

systeme nach Steinitz die Invarianten

$$(23)\qquad \frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{im})}, \frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{i,m-1})}, \ldots, \frac{\pi_i}{(\pi_i, \eta_{i1})}.$$

Die Invarianten (23) sind die Poincaréschen Zahlen von $\mathfrak{D}_i$.

2. Die Poincaréschen Zahlen des Zentrums von $\mathfrak{G}_2$ sind ebenfalls durch die Poincaréschen Zahlen von $\mathfrak{G}$ und die Invarianten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ bestimmt. Um das zu beweisen, untersuchen wir das Zentrum einer Gruppe $\mathfrak{G}_2$, die durch die Erzeugenden $1 + s_1, 1 + s_2, \ldots, 1 + s_n$ und die Relationen

$$(24)\qquad 1 + \pi_i s_i + \sum_{j<l} \pi_{jl}^i s_{jl} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

gegeben ist. Zum Zentrum gehören diejenigen Elemente, die mit allen Elementen von $\mathfrak{G}_2$ vertauschbar sind.

Wir setzen zunächst voraus, daß $r < n$ ist, daß also die Zahl der Relationen kleiner ist als die der Erzeugenden. Damit das Element

$$1 + t = 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_j + \frac{1}{2} \sum_{j<l} \alpha_{jl} s_{jl}$$

mit $1 + s_l$ $(l = 1, 2, \ldots, r)$ vertauschbar ist, muß der Kommutator

$$(1 + t)(1 + s_l)(1 - t)(1 - s_l) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_{jl}$$

eine Folgerelation, also gleich

$$1 + \sum_{j=1}^{l} \pi_j \alpha_j^{(j)} s_{jl} + \sum_{j=l+1}^{n} \pi_l \alpha_j^{(j)} s_{jl}$$

sein.

Damit $1 + t$ mit $1 + s_l$ $(l = r + 1, r + 2, \ldots, n)$ vertauschbar ist, muß der Kommutator

$$(1 + t)(1 + s_l)(1 - t)(1 - s_l) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_{jl}$$

eine Folgerelation, also gleich

$$1 + \sum_{j=1}^{r} \pi_j \alpha_j^{(j)} s_{jl}$$

sein.

Daraus folgt, daß α_j für $j = r + 1, r + 2, \ldots, n$ gleich Null sein muß, wenn $1 + t$ zum Zentrum gehören soll.

Das Zentrum wird mithin aus

$$1 + \pi_j s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \quad \text{und}$$
$$1 + s_{jl} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n;\ \ j < l)$$

erzeugt. Mit Hilfe der Relationen (24) lassen sich die Erzeugenden

$$1 + \pi_j s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

durch die Erzeugenden

$$1 + s_{jl} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n;\ \ j < l)$$

ausdrücken. Das Zentrum wird also erzeugt durch

$$1 + s_{jl} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n;\ j < l).$$

Daraus folgt, daß das Zentrum für den Fall $r < n$ mit der Kommutatorgruppe identisch ist, also keine neuen Invarianten liefert.

Jetzt betrachten wir das Zentrum einer Gruppe $\mathfrak{G}_2$, für die $r = n$ ist. Damit in diesem Falle $1 + t$ mit $1 + s_l\,(l = 1, 2, \ldots, n)$ vertauschbar ist, muß der Kommutator

$$(1 + t)(1 + s_l)(1 - t)(1 - s_l) = 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j s_{jl}$$

eine Folgerelation, also gleich

$$1 + \sum_{j=1}^{l} \pi_j \alpha_j^{(j)} s_{jl} + \sum_{j=l+1}^{n} \pi_l \alpha_j^{(j)} s_{jl}$$

sein.

Das Zentrum wird jetzt erzeugt aus den Elementen

$$1 + \pi_j s_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad 1 + \pi_{n-1} s_n \quad \text{und}$$
$$1 + s_{jl} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n;\ \ j < l).$$

Die Erzeugenden

$$1 + \pi_j s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

können wir mit Hilfe der Relationen (24) durch die Erzeugenden

$$1 + s_{jl} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1;\ l = 2, 3, \ldots, n;\ j < l)$$

ausdrücken. Ist $r = n$, so wird das Zentrum also erzeugt durch

$$1 + \pi_{n-1} s_n \quad \text{und}$$
$$1 + s_{jl} \qquad (j, l = 1, 2, \ldots, n;\ j < l).$$

Die definierenden Relationen des Zentrums, die wir erhalten, wenn wir die letzte der Relationen (24) und die Folgerelationen $1 + \pi_j s_{jl} = 1 \quad (j, l = 1, 2, \ldots, n;\ j < l)$ allein durch die Erzeugenden des Zentrums ausdrücken, sind folgende:

$$[1 + \pi_{n-1} s_n]^{\frac{\pi_n}{\pi_{n-1}}} [1 + s_{12}]^{\pi_{12}^n} [1 + s_{13}]^{\pi_{13}^n} \cdots [1 + s_{n-1,n}]^{\pi_{n-1}^n} = 1$$
$$[1 + s_{jl}]^{\pi_j} = 1 \ \ (j, l = 1, 2, \ldots, n;\ j < l).$$

Die Poincaréschen Zahlen des Zentrums $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ erhalten wir als Elementarteiler der Matrix

(25)

$$\left|\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{\pi_n}{\pi_{n-1}} & \pi_{12}^n & \pi_{13}^n & \ldots & \pi_{1n}^n & \pi_{23}^n & \pi_{24}^n & \ldots & \pi_{2n}^n & \pi_{34}^n & \ldots & \pi_{n-1,n}^n \\
0 & \pi_1 & 0 & 0 \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & 0 \\
0 & 0 & \pi_1 & 0 \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & 0 \\
. & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\
0 & . & . & \ldots & 0 & \pi_1 & 0 & \ldots & . & . & \ldots & 0 \\
0 & . & . & \ldots & 0 & \pi_2 & 0 & \ldots & . & . & \ldots & 0 \\
0 & . & . & \ldots & . & 0 & \pi_2 & 0 \ldots & . & . & \ldots & 0 \\
0 & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\
0 & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & 0 & \pi_2 & \ldots & 0 \\
0 & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & 0 & \pi_3 & 0 \ldots & 0 \\
. & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\
0 & . & . & \ldots & . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & \pi_{n-1}
\end{array}\right|$$

Setzen wir

$$d_i = (\pi_i, \frac{\pi_n}{\pi_{n-1}}, \pi_{12}^n \frac{\pi_i}{\pi_1}, \pi_{13}^n \frac{\pi_i}{\pi_1}, \ldots, \pi_{1n}^n \frac{\pi_i}{\pi_1}, \pi_{23}^n \frac{\pi_i}{\pi_2}, \pi_{24}^n \frac{\pi_i}{\pi_2}, \ldots, \pi_{2n} \frac{\pi_i}{\pi_2},$$

$$\pi_{34}^n \frac{\pi_i}{\pi_3}, \pi_{35}^n \frac{\pi_i}{\pi_3}, \ldots, \pi_{i-1,n}^i \frac{\pi_i}{\pi_{i-1}}, \pi_{i,i+1}, \pi_{i,i+2}, \ldots, \pi_{in}, \ldots, \pi_{n-1,n})$$

so ist

$$\zeta_1 = d_1, \zeta_2 = \pi_1, \zeta_3 = \pi_1, \ldots, \zeta_{n-1} = \pi_1$$

$$\zeta_n = \frac{\pi_1 d_2}{\zeta_1}, \zeta_{n+1} = \pi_2, \zeta_{n+2} = \pi_2, \ldots, \zeta_{2n-3} = \pi_2$$

$$\zeta_{2n-2} = \frac{\pi_1 \pi_2 d_3}{\zeta_1 \zeta_n}, \zeta_{2n-1} = \pi_3, \zeta_{2n} = \pi_3, \ldots, \zeta_{3n-4} = \pi_3$$

. . . . . .

$$\zeta_{\frac{n}{2}(n-1)} = \frac{\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{n-2} d_{n-1}}{\zeta_1 \zeta_n \zeta_{2n-2} \zeta_{3n-3} \cdots \zeta_{\frac{n-2}{2}(n+1)}}$$

$$\zeta_{\frac{n}{2}(n-1)+1} = \frac{\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{n-2} \pi_n}{\zeta_1 \zeta_n \zeta_{2n-2} \zeta_{3n-3} \cdots \zeta_{\frac{n-2}{2}(n+1)}}.$$

Die Invarianten

$$\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_{n+1}, \zeta_{n+2}, \ldots, \zeta_{2n-3}, \zeta_{2n-1}, \ldots, \zeta_{\frac{n}{2}(n-1)-1}$$

sind identisch mit den Poincaréschen Zahlen von $\mathfrak{G}_2$; wir müssen zeigen, daß auch die

$$\zeta_1, \zeta_n, \zeta_{2n-2}, \zeta_{3n-3}, \ldots, \zeta_{\frac{n}{2}(n-1)}$$

durch die Poincaréschen Zahlen von $\mathfrak{G}_2$ und die $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{im}$ bestimmt sind.

Beim Beweise benutzen wir folgenden Satz über größte gemeinsame Teiler:

Sind α, β, γ und $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ ganze Zahlen und ist

$$(\alpha, \beta) = \delta_1, \quad (\alpha, \beta\, \gamma) = \delta_2$$

und

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \delta_1, \quad (\bar{\alpha}, \bar{\beta}\, \gamma) = \delta_2,$$

so haben auch

$$(\alpha, \gamma) \text{ und } (\bar{\alpha}, \gamma)$$

denselben größten gemeinsamen Teiler.

Beweis: α und β haben den größten gemeinsamen Teiler δ_1.

$$\alpha = \varrho_1 \delta_1, \quad \beta = \sigma_1 \delta_1 \quad \text{und} \quad \bar{\alpha} = \varrho_2 \delta_1, \quad \bar{\beta} = \sigma_2 \delta_1$$
$$(\varrho_1, \sigma_1) = 1 \qquad\qquad (\varrho_2, \sigma_2) = 1.$$

Dann ist

$$(\alpha, \beta) = (\varrho_1\, \delta_1,\ \sigma_1\, \delta_1) = \delta_1 \text{ und } (\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\varrho_2\, \delta_1,\ \sigma_2\, \delta_1) = \delta_1,$$

$$\delta_2 = (\alpha, \beta\, \gamma) = (\varrho_1\, \delta_1,\ \sigma_1\, \delta_1\, \gamma) \quad \delta_2 = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}\, \gamma) = (\varrho_2\, \delta_1,\ \sigma_2\, \delta_1\, \gamma)$$
$$= \delta_1(\varrho_1, \sigma_1\, \gamma) \qquad = \delta_1(\varrho_2, \sigma_2\, \gamma)$$
$$= \delta_1(\varrho_1, \gamma) \qquad = \delta_1(\varrho_2, \gamma).$$

Daraus folgt

$$(\varrho_1, \gamma) = (\varrho_2, \gamma). \tag{26}$$

Dann ist auch $(\varrho_1\, \delta_1, \gamma) = (\varrho_2\, \delta_1, \gamma)$. Also $(\alpha, \gamma) = (\bar{\alpha}, \gamma)$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Nun vergleichen wir die Invarianten $\zeta_1, \eta_{n-1,1}$ und η_{n1} von $\mathfrak{G}_2$. Es ist $\zeta_1 = d_1$. Wenn

$$p_k^i = \left(\pi_{12}^i \frac{\pi_k}{\pi_i},\ \pi_{13}^i \frac{\pi_k}{\pi_i}, \ldots, \pi_{n-1,n}^i \frac{\pi_k}{\pi_i}\right) \text{ und}$$

$$p^i = (\pi_{12}^i, \pi_{13}^i, \ldots, \pi_{n-1,n}^i), \quad \text{so ist}$$

$$\eta_{n-1,1} = (\pi_1, p_{n-1}^1, p_{n-1}^2, \ldots, p_{n-1}^{n-2}, p^{n-1}, p^n)$$

$$\eta_{n1} = (\pi_1, p_n^1, p_n^2, \ldots, p_n^{n-1}, p^n).$$

Setzen wir

$$\alpha = (\pi_1, p^n), \quad \gamma = \frac{\pi_n}{\pi_{n-1}}$$

und

$$\beta = (p_{n-1}^1, p_{n-1}^2, \ldots, p_{n-1}^{n-1}),$$

so ist

$$\eta_{n-1,1} = (\alpha, \beta), \quad \eta_{n1} = (\alpha, \beta\, \gamma) \text{ und } \zeta_1 = (\alpha, \gamma).$$

Aus dem Satze über größte gemeinsame Teiler folgt, daß für zwei Gruppen $\mathfrak{G}_2$ und $\overline{\mathfrak{G}_2}$ die Zahlen ζ_1 und $\overline{\zeta_1}$ gleich sind, sobald $\eta_{n-1,1} = \overline{\eta}_{n-1,1}$ und $\eta_{n,1} = \overline{\eta}_{n,1}$ sind. Entsprechend können wir zeigen, daß

$$\zeta_n \text{ durch } \eta_{n-1,n} \text{ und } \eta_{n,n}$$

$$\zeta_{2n-2} \text{ durch } \eta_{n-1,2n-2} \text{ und } \eta_{n,2n-2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\zeta_{\frac{n}{2}(n-1)} \text{ durch } \eta_{n-1,\frac{n}{2}(n-1)} \text{ und } \eta_{n,\frac{n}{2}(n-1)}$$

bestimmt sind.

Damit ist bewiesen, daß uns die Poincaréschen Zahlen des Zentrums keine neuen Gruppeninvarianten liefern.

3. Wir wollen untersuchen, wieweit die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ durch die Invarianten π_i und η_{il} gekennzeichnet ist.

Wenn eine Gruppe $\mathfrak{G}_2$ mit n Erzeugenden und r definierenden Relationen

$$1 + \pi s_i + \frac{1}{2} \sum_{j<l} \pi_{jl}^i s_{jl} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

wo π eine Primzahl, gegeben ist, und wir führen neue Erzeugende ein und bilden neue definierende Relationen, so daß dabei die Matrix

$$\| \pi \delta_{ik} \| \qquad \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

von rechts und links mit zueinander inversen Matrizen multipliziert wird, so setzen sich die π_{jl}^i um wie ein schiefsymmetrischer Tensor mit zwei unteren Indizes und einem oberen. Die Eigenschaften eines solchen Tensors sind schon im Gebiete der kontinuierlichen Gruppen sehr kompliziert, und noch mehr bei unseren Gruppen, wo der Tensor ganzzahlig ist.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ mit zwei Erzeugenden $1 + s_1$ und $1 + s_2$ und den beiden Relationen

$$(27) \qquad \begin{aligned} 1 + \pi_1 s_1 + \pi_{12}^1 s_{12} &= 1 \\ 1 + \pi_1 s_2 + \pi_{12}^2 s_{12} &= 1 \end{aligned}$$

ist durch ihre Invarianten π_1 und $\eta_{11} = (\pi_1, \pi_{12}^1, \pi_{12}^2)$ vollständig bestimmt.

Um das zu beweisen, führen wir statt $1 + s_1$ und $1 + s_2$ die neuen Erzeugenden

$$1 + s_1' = 1 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \tfrac{1}{2} \alpha_{12} s_{12}$$

$$1 + s_2' = 1 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \tfrac{1}{2} \beta_{12} s_{12}$$

mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 1$$

ein. $1 + s_1$ und $1 + s_2$ sollen durch $1 + s_1'$ und $1 + s_2'$ ausgedrückt werden.

$$(1 + s_1')^{\beta_2} (1 - s_2')^{\alpha_2} = 1 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\, s_1 + \tfrac{1}{2}\,(\alpha_{12}\beta_2 - \alpha_2\beta_{12} - \alpha_1\alpha_2\beta_2^2 + \beta_1\alpha_2^2\,\beta_2)\, s_{12}$$
$$(1 + s_1')^{\beta_1} (1 - s_2')^{\alpha_1} = 1 + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)\, s_2 + \tfrac{1}{2}\,(\alpha_{12}\beta_1 - \beta_{12}\alpha_1 - \alpha_1^2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\alpha_2\,\beta_1^2)\, s_{12}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$1 + s_1 = (1 + s_1')^{\beta_2} (1 - s_2')^{\alpha_2} (1 - \tfrac{1}{2}\,(\alpha_{12}\beta_2 - \beta_{12}\alpha_2 - \alpha_2\beta_2)\, s_{12}')$$
$$1 + s_2 = (1 + s_1')^{\beta_1} (1 - s_2')^{\alpha_1} (1 - \tfrac{1}{2}\,(\alpha_{12}\beta_1 - \beta_{12}\alpha_1 - \alpha_1\beta_1)\, s_{12}').$$

In den neuen Erzeugenden heißen die Relationen

$$(28) \quad 1 + \pi_1\beta_2 s_1' - \pi_1\alpha_2 s_2' - \tfrac{1}{2}\,[\pi_1(\alpha_{12}\beta_2 - \beta_{12}\alpha_2) - 2\pi_{12}^1]\, s_{12}' = 1$$
$$(29) \quad 1 - \pi_1\beta_1 s_1' + \pi_1\alpha_1 s_2' - \tfrac{1}{2}\,[\pi_1(\alpha_{12}\beta_1 - \beta_{12}\alpha_1) + 2\pi_{12}^2]\, s_{12}' = 1.$$

Die Relationen sollen durch Bildung von geeigneten Folgerelationen wieder in die Normalform gebracht werden, in der uns die Relationen (27) gegeben sind. Zu diesem Zwecke erhebe ich einmal (28) in die α_1-te Potenz und (29) in die α_2-te und multipliziere die beiden Relationen. Dann erhebe ich (28) in die β_1-te Potenz und (29) in die β_2-te und multipliziere sie wieder; so erhalte ich die Relationen

$$1 + \pi_1 s_1' - \tfrac{1}{2}\,[\alpha_1\pi_1(\alpha_{12}\beta_2 - \beta_{12}\alpha_2) - \alpha_2\pi_1(\alpha_{12}\beta_1 - \beta_{12}\alpha_1) - \alpha_1\alpha_2\pi_1^2 - 2\alpha_1\pi_{12}^1 - 2\alpha_2\pi_{12}^2]\, s_{12}' = 1$$
$$1 + \pi_1 s_2' - \tfrac{1}{2}\,[\beta_1\pi_1(\alpha_{12}\beta_2 - \beta_{12}\alpha_2) - \beta_2\pi_1(\alpha_{12}\beta_1 - \beta_{12}\alpha_1) - \beta_1\beta_2\pi_1^2 - 2\beta_1\pi_{12}^1 - 2\beta_2\pi_{12}^2]\, s_{12}' = 1,$$

die übersichtlicher folgendermaßen geschrieben werden können:

$$1 + \pi_1 s_1' + (\mu_1\pi_1 + \alpha_1\pi_{12}^1 + \alpha_2\pi_{12}^2)\, s_{12}' = 1$$
$$1 + \pi_1 s_2' + (\mu_2\pi_1 + \beta_1\pi_{12}^1 + \beta_2\pi_{12}^2)\, s_{12}' = 1,$$

wo μ_1 und μ_2 jede beliebige Zahl darstellen können, da $1 + \pi_1 s_{12}' = 1$ ist. Setzen wir $\mu_1 = \mu_2 = 0$, so können wir durch geeignete Wahl der $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ die Relationen stets in die Gestalt

$$(30) \quad \begin{aligned} 1 + \pi_1 s_1' + (\pi_{12}^1, \pi_{12}^2)\, s_{12}' &= 1 \\ 1 + \pi_1 s_2' &= 1 \end{aligned}$$

bringen, denn es ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\pi_{12}^1 + \alpha_2\pi_{12}^2 \\ \beta_1\pi_{12}^1 + \beta_2\pi_{12}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_{12}^1 \\ \pi_{12}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

und ich kann die Matrix $\begin{vmatrix} \pi_{12}^1 \\ \pi_{12}^2 \end{vmatrix}$ stets durch Multiplikation mit einer unimodularen Matrix in die Elementarteilerform, also in die Form $\begin{vmatrix} (\pi_{12}^1, \pi_{12}^2) \\ 0 \end{vmatrix}$ bringen.

Wir führen noch einmal neue Erzeugende ein:

$$(31) \quad \begin{aligned} 1 + \bar{s}_1 &= 1 + s_1' \\ 1 + \bar{s}_2 &= 1 + \gamma s_2', \end{aligned}$$

wo γ jede beliebige Zahl sein kann, für die $(\gamma, \pi_1) = 1$ ist. Ich kann die Erzeugenden $1 + s_1'$ und $1 + s_2'$ durch die neuen $1 + \bar{s}_1$ und $1 + \bar{s}_2$ ausdrücken:

$$1 + s_1' = 1 + \bar{s}_1$$
$$1 + \delta\bar{s}_2 = 1 + \delta\gamma s_2' = 1 + (\delta\gamma - \varepsilon\pi_1)\, s_2',$$

wo δ und ε so gewählt werden, daß $\delta\gamma - \varepsilon\pi_1 = 1$ ist. Dann ist

$$1 + s_2' = 1 + \delta\bar{s}_2. \tag{32}$$

In den neuen Erzeugenden heißen die Relationen

$$1 + \pi_1\bar{s}_1 + \delta(\pi_{12}^1, \pi_{12}^2)\,\bar{s}_{12} = 1 \tag{33}$$

$$1 + \delta\,\pi_1\,\bar{s}_2 = 1, \tag{34}$$

wo $(\delta, \pi_1) = 1$ ist. Aus den Gleichungen (31) und (32) folgt die Relation

$$1 + \bar{s}_2 = 1 + \gamma\,\delta\,\bar{s}_2 \quad \text{oder}$$
$$1 + (\gamma\,\delta - 1)\,\bar{s}_2 = 1.$$

Wegen $\gamma\delta - \varepsilon\pi_1 = 1$ geht die letzte Relation in

$$1 + \varepsilon\pi_1\bar{s}_2 = 1 \tag{35}$$

über. Aus (33), (34), (35) folgen die beiden Relationen

$$1 + \pi_1\bar{s}_1 + \delta(\pi_{12}^1, \pi_{12}^2)\,\bar{s}_{12} = 1$$
$$1 + [\delta\pi_1, \varepsilon\pi_1]\,\bar{s}_2 = 1$$

oder

$$1 + \pi_1\bar{s}_1 + \delta(\pi_{12}^1, \pi_{12}^2)\,\bar{s}_{12} = 1 \tag{36}$$
$$1 + \pi_1\bar{s}_2 = 1,$$

denn es ist $(\delta, \varepsilon) = 1$, da $\gamma\delta - \varepsilon\pi_1 = 1$ ist. Da $1 + \pi_1\bar{s}_{12} = 1$ ist, so kann ich die Relationen (36) auch in der Form

$$1 + \pi_1\bar{s}_1 + [\delta(\pi_{12}^1, \pi_{12}^2) + \mu\pi_1]\,\bar{s}_{12} = 1$$
$$1 + \pi_1\bar{s}_2 = 1$$

schreiben. Ich kann nun δ und μ so wählen, daß

$$\delta(\pi_{12}^1, \pi_{12}^2) + \mu\pi_1 = (\pi_{12}^1, \pi_{12}^2, \pi_1)$$

wird, und wir erhalten die Relationen

$$1 + \pi_1\bar{s}_1 + \eta_{11}s_{12} = 1$$
$$1 + \pi_1\bar{s}_2 = 1,$$

wo $\eta_{11} = (\pi_{12}^1, \pi_{12}^2, \pi_1)$ ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ mit zwei Erzeugenden $1 + s_1$ und $1 + s_2$ und den definierenden Relationen

$$1 + \pi_1 s_1 + \pi_{12}^1 s_{12} = 1$$
$$1 + \pi_2 s_2 + \pi_{12}^2 s_{12} = 1$$

ist nicht durch ihre Invarianten π_1, η_{11} und η_{21} bestimmt.

§ 3.

1. In § 1 haben wir ein Verfahren angegeben, wie wir aus der Faktorgruppe $\mathfrak{G}_2$ Gruppeninvarianten ableiten können. Dieses Verfahren können wir auch auf die Faktorgruppe $\mathfrak{G}_3$ der dritten höheren Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_3$ anwenden und erhalten dann wieder eine Reihe neuer Invarianten, was hier nur für eine Gruppe $\mathfrak{G}_3$ mit zwei Erzeugenden und zwei definierenden Relationen durchgeführt werden wird.

$\mathfrak{C}_3$ enthält alle Kommutatorelemente eines Elementes aus $\mathfrak{G}$ mit einem Element aus $\mathfrak{C}_2$, also alle Elemente

$$D \cdot C \cdot ABA^{-1}B^{-1} \cdot C^{-1} \cdot BAB^{-1}A^{-1} \cdot D^{-1} \cdot ABA^{-1}B^{-1} \cdot C \cdot BAB^{-1}A^{-1} \cdot C^{-1}. \tag{37}$$

Wir bilden die Elemente

$$A_{jk} = S_jS_kS_j^{-1}S_k^{-1} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n)$$
$$A_{jkl} = S_jA_{kl}S_j^{-1}A_{kl}^{-1} \quad (j, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$A_{jklm} = S_j A_{klm} S_j^{-1} A_{klm}^{-1} \qquad (j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Durch die Transformierten der A_{jklm} $(j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n)$ lassen sich alle Elemente (37) ausdrücken. Man erhält die definierende Relation von $\mathfrak{G}_3$, wenn man zu den Relationen (1)

$$A_{jklm} = 1 \qquad (j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n) \tag{38}$$

hinzufügt. Wie bereits gesagt, wollen wir uns darauf beschränken, eine Gruppe $\mathfrak{G}$ zu untersuchen, die durch zwei Erzeugende und zwei Relationen

$$F_i(S_1, S_2) = 1 \qquad (i = 1, 2) \tag{39}$$

gegeben ist.

Man kann die Elemente von $\mathfrak{G}_3$ auf eine Normalform bringen. Jedes Element von $\mathfrak{G}$ läßt sich bekanntlich in die Gestalt

$$S_1^{a_1} S_1^{a_2} T$$

bringen, wo T ein Produkt von Transformierten der Elemente A_{12} ist. Nun ist

$$L A_{12} L^{-1} = A_{12}\, A_{12}^{-1} L A_{12} L^{-1}.$$

$A_{12}^{-1} L A_{12} L^{-1}$ läßt sich wieder als Produkt von Transformierten der A_{112} und A_{221} und ihrer Inversen schreiben. Berücksichtigen wir noch, daß aus den Relationen (38) folgt:

$$L\, A_{jkl}\, L^{-1} = A_{ikl} \quad (j, k, l = 1, 2)$$

und

$$A_{jkl}\, A_{mno} = A_{mno}\, A_{jkl} \qquad (j, k, l, m, n, o = 1, 2),$$

so können wir, wenn wir die A_{12}, A_{112} und A_{221} als neue Erzeugende einführen, jedes Element von $\mathfrak{G}_3$ in die Gestalt

$$S_1^{a_1} S_2^{a_2} A_{12}^{a_1} A_{112}^{a_{112}} A_{221}^{a_{221}} \tag{40}$$

bringen.

Wir suchen jetzt das normierte Produkt zweier normierter Elemente. Berücksichtigen wir, daß

$$S_j^{a_j} A_{kl}^{a_{kl}} S_j^{-a_j} A_{kl}^{-a_{kl}} = A_{jkl}^{a_j a_{kl}}$$

und

$$S_1^{a_1} S_2^{b_2} S_1^{-a_1} S_2^{-b_2} = A_{12}^{a_1 b_2} A_{112}^{\frac{b_2 a_1 (a_1 - 1)}{2}} A_{221}^{\frac{-a_1 b_2 (b_2 - 1)}{2}}$$

ist, so erhalten wir das normierte Produkt

$$\begin{aligned} &S_1^{a_1} S_2^{a_2} A_{12}^{a_{12}} A_{112}^{a_{112}} A_{221}^{a_{221}} \cdot S_1^{b_1} S_2^{b_2} A_{12}^{b_{12}} A_{112}^{b_{112}} A_{221}^{b_{221}} \\ &= S_1^{a_1 + b_1} S_2^{a_2 + b_2} A_{12}^{a_{12} + b_{12} - b_1 a_2} A_{111}^{a_{112} + b_{112} - b_1 a_{12} + \frac{a_2 b_1^2 + a_2 b_1}{2}} A_{221}^{a_{221} + b_{221} + b_2 a_{12} - \frac{b_1 a_2^2 + b_1 a_2}{2} - a_2 b_1 b_2}. \end{aligned} \tag{41}$$

2. Wir geben noch eine andere Darstellung der Faktorgruppe mit zwei Erzeugenden und zwei Relationen, die für unsere weiteren Rechnungen günstig ist, da sich die Elemente in dieser Darstellung sehr einfach potenzieren lassen.

Zwischen den Gebilden $1 + s_1$ und $1 + s_2$ erkläre ich das Produkt

$$\begin{aligned} (1 + s_1)(1 + s_2) &= 1 + s_1 + s_2 + \tfrac{1}{2}(s_1 s_2 - s_2 s_1) \\ &+ \tfrac{1}{12}[s_1 (s_1 s_2 - s_2 s_1) - (s_1 s_2 - s_2 s_1) s_1] + \tfrac{1}{12}[s_2 (s_2 s_1 - s_1 s_2) - (s_2 s_1 - s_1 s_2) s_2]. \end{aligned}$$

Im folgenden schreibe ich stets für

$$1 + s_1 s_2 - s_2 s_1 = 1 + s_{12}$$
$$1 + s_1(s_1 s_2 - s_2 s_1) - (s_1 s_2 - s_2 s_1) s_1 = 1 + s_{112}$$
$$1 + s_2(s_2 s_1 - s_1 s_2) - (s_2 s_1 - s_1 s_2) s_2 = 1 + s_{221}$$

und erkläre allgemein das Produkt

$$\begin{aligned}
&[1 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{12} s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{112} s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{221} s_{221}] \\
&[1 + \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 + \tfrac{1}{2}\beta_{12} s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\beta_{112} s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\beta_{221} s_{221}] \\
(42)\quad &= 1 + (\alpha_1 + \beta_1) s_1 + (\alpha_2 + \beta_2) s_2 + \tfrac{1}{2}(\alpha_{12} + \beta_{12} + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) s_{12} \\
&+ \tfrac{1}{1\,2}(\alpha_{112} + \beta_{112} + 3\alpha_1\beta_{12} - 3\beta_1\alpha_{12} + \alpha_1^2\beta_2 - \alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_1^2 - \alpha_1\beta_1\beta_2) s_{112} \\
&+ \tfrac{1}{1\,2}(\alpha_{221} + \beta_{221} - 3\alpha_2\beta_{12} + 3\beta_2\alpha_{12} - \alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1 - \alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) s_{221}.
\end{aligned}$$

Die Multiplikation ist assoziativ, wie man leicht nachrechnen kann. Dem in allgemeiner Form geschriebenen Element (40) von $\mathfrak{G}_3$ entspricht in der neuen Darstellung von $\mathfrak{G}_3$ das Element

$$\begin{aligned}
&(1 + a_1 s_1)(1 + a_2 s_2)[(1 + s_1)(1 + s_2)(1 - s_1)(1 - s_2)]^{a_{12}}[1 + a_{112} s_{112}][1 + a_{221} s_{221}] \\
&= 1 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \tfrac{1}{2}(2 a_{12} + a_1 a_2) s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}(12 a_{112} + 6 a_1 a_{12} + 6 a_{12} + a_1^2 a_2) s_{112} \\
&+ \tfrac{1}{1\,2}(12 a_{221} - 6 a_2 a_{12} - 6 a_{12} + a_1 a_2^2) s_{221} \\
&= 1\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{12} s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{112} s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{221} s_{221},
\end{aligned}$$

wo $\alpha_1 = a_1$, $\alpha_2 = a_2$, $\alpha_{12} = 2 a_{12} + a_1 a_2$

$$\begin{aligned}
(43)\qquad \alpha_{112} &= 12 a_{112} + 6 a_1 a_{12} + 6 a_{12} + a_1^2 a_2 \\
\alpha_{221} &= 12 a_{221} - 6 a_2 a_{12} - 6 a_{12} + a_1 a_2^2
\end{aligned}$$

gesetzt worden ist. Daraus folgt, daß zwischen den $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \alpha_{112}, \alpha_{221}$ folgende Kongruenzen bestehen:

$$\begin{aligned}
(44)\qquad \alpha_{12} &\equiv a_1 a_2 \equiv \alpha_1\alpha_2 \pmod 2 \\
\alpha_{112} &\equiv 6 a_1 a_{12} + 6 a_{12} + a_1^2 a_2 \pmod{12} \\
\alpha_{112} &\equiv 6\alpha_1 \frac{\alpha_{12} - \alpha_1\alpha_2}{2} + 6\frac{\alpha_{12} - \alpha_1\alpha_2}{2} + \alpha_1^2\alpha_2 \pmod{12} \\
(45)\qquad \alpha_{112} &\equiv 3\alpha_1\alpha_{12} - 2\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_{12} - 3\alpha_1\alpha_2 \pmod{12} \\
\alpha_{221} &\equiv -6 a_2 a_{12} - 6 a_{12} + a_1 a_2^2 \pmod{12} \\
\alpha_{221} &\equiv -6\alpha_2 \frac{\alpha_{12} - \alpha_1\alpha_2}{2} - 6\frac{\alpha_{12} - \alpha_1\alpha_2}{2} + \alpha_1\alpha_2^2 \pmod{12} \\
(46)\qquad \alpha_{221} &\equiv -3\alpha_2\alpha_{12} + 4\alpha_1\alpha_2^2 - 3\alpha_{12} + 3\alpha_1\alpha_2 \pmod{12}.
\end{aligned}$$

Diese Eigenschaften der Zahlen $\alpha_{12}, \alpha_{112}, \alpha_{221}$ bleiben auch beim Multiplizieren erhalten. Die Gesamtheit der Elemente

$$(47)\qquad 1 + \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{12} s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{112} s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{221} s_{221}$$

bilden eine Gruppe, wenn die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \alpha_{112}, \alpha_{221}$ ganze Zahlen sind, und zwar α_1 und α_2 beliebige, und die $\alpha_{12}, \alpha_{112}, \alpha_{221}$ den Kongruenzen (44), (45) und (46) genügen.

$$1 - \alpha_1 s_1 - \alpha_2 s_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_{12} s_{12} - \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{112} s_{112} - \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{221} s_{221}$$

ist das zu (47) inverse Element. Die eben erklärte Gruppe ist zur Gruppe aus den Erzeugenden S_1, S_2 und den Relationen $A_{jklm} = 1$ $(j, k, l, m = 1,2)$ isomorph. Ordnen wir nämlich dem Element (40) das Element (47) zu, wobei die $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \alpha_{112}, \alpha_{121}$ durch die Gleichungen (43) bestimmt sind, so ist diese Beziehung eineindeutig, und es entspricht dem Produkt von zwei Elementen (40) gerade das Produkt der ihnen zugeordneten Elemente (47). Ich erhalte die zur Faktorgruppe $\mathfrak{G}_3$ isomorphe Gruppe, wenn ich noch die Relationen

$$1 + \varphi_1^i s_1 + \varphi_2^i s_2 + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}^i s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\varphi_{112}^i s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\varphi_{221}^i s_{221} = 1 \qquad (i = 1, 2)$$

hinzufüge.

3. Wir untersuchen die Gruppe $\mathfrak{G}_3$ mit zwei Erzeugenden $1 + s_1$, $1 + s_2$ und zwei Relationen

$$(48)\quad \begin{aligned} &1 + \varphi_1^1 s_1 + \varphi_2^1 s_2 + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}^1 s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\varphi_{112}^1 s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\varphi_{221}^1 s_{221} = 1 \\ &1 + \varphi_1^2 s_1 + \varphi_2^2 s_2 + \tfrac{1}{2}\varphi_{12}^2 s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\varphi_{112}^2 s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\varphi_{221}^2 s_{221} = 1\,. \end{aligned}$$

Es lassen sich neue Erzeugende $1 + \bar{s}_1$ und $1 + \bar{s}_2$ einführen, und solche Folgerelationen bilden, daß wir statt der Relationen (48) die Relationen

$$(49)\quad \begin{aligned} &1 + \pi_1 \bar{s}_1 + \pi_{12}^1 \bar{s}_{12} + \tfrac{1}{2}\pi_{112}^1 \bar{s}_{112} + \tfrac{1}{2}\pi_{221}^1 \bar{s}_{221} = 1 \\ &1 + \pi_2 \bar{s}_2 + \pi_{12}^2 \bar{s}_{12} + \tfrac{1}{2}\pi_{112}^2 \bar{s}_{112} + \tfrac{1}{2}\pi_{221}^2 \bar{s}_{221} = 1 \end{aligned}$$

erhalten, wo π_1 und π_2 die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_2^1 \\ \varphi_1^2 & \varphi_2^2 \end{vmatrix}$$

sind. Ich will im folgenden die Querstriche wieder fortlassen. Es sei $\pi_1 \neq 0$ und $\neq 1$ und $\pi_2 \neq 0$. Dann sind π_1 und π_2 die Poincaréschen Zahlen der Gruppe.

Die erste Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{31}$ von $\mathfrak{G}_3$, die sämtliche Kommutatorelemente aus zwei Elementen von $\mathfrak{G}_3$ enthält, hat die Erzeugenden

$$1 + t = 1 + s_{12} + \tfrac{1}{2} s_{112} + \tfrac{1}{2} s_{221}$$
$$1 + s_{112} \text{ und } 1 + s_{221}$$

und die definierenden Relationen

$$\begin{aligned} &1 + \pi_1 t - \tfrac{1}{2}\pi_1(\pi_1 + 1) s_{112} + \pi_{12}^1 s_{221} = 1 \\ &1 + \pi_2 t + \pi_{12}^2 s_{112} + \tfrac{1}{2}\pi_2(\pi_2 - 1) s_{221} = 1 \\ &1 + (\pi_1, \pi_{12}^1) s_{112} = 1 \\ &1 + (\pi_1, \pi_{12}^2) s_{221} = 1\,. \end{aligned}$$

Die zweite Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{32}$ ist die Gruppe aller Kommutatorelemente eines Elements aus $\mathfrak{G}_3$ mit einem Element aus der ersten Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{31}$. $\mathfrak{C}_{32}$ hat die Erzeugenden $1 + s_{112}$ und $1 + s_{221}$ und die definierenden Relationen

$$1 + (\pi_1, \pi_{12}^1) s_{112} = 1$$
$$1 + (\pi_1, \pi_{12}^2) s_{221} = 1\,.$$

Die Poincaréschen Zahlen der beiden Kommutatorgruppen liefern uns keine neuen Gruppeninvarianten.

§ 4.

1. Wir bilden die π_1-ten Potenzen sämtlicher Glieder der Gruppe $\mathfrak{G}_3$. Die Gesamtheit der Elemente

$$(50)\quad 1 + \alpha_1 \pi_1 s_1 + \alpha_2 \pi_1 s_2 + \tfrac{1}{2}\alpha_{12}\pi_1 s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{112}\pi_1 s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\alpha_{221}\pi_1 s_{221}$$

bildet eine Gruppe $\mathfrak{H}_1$, wenn π_1 ungerade ist, was wir voraussetzen wollen. (Ist π_1 gerade, so bilden wir die $\frac{\pi_1}{2^\nu}$-ten Potenzen sämtlicher Elemente von $\mathfrak{G}_3$, wo ν angibt, wievielmal der Faktor 2 in π_1 enthalten ist.) Ich bilde den Durchschnitt $\mathfrak{D}_1$ von $\mathfrak{H}_1$ mit der ersten Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{31}$ und dann die Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}_{31}}{\mathfrak{D}_1}$.

Die Poincaréschen Zahlen von $\frac{\mathfrak{C}_{31}}{\mathfrak{D}_1}$, die mir neue Invarianten von $\mathfrak{G}_3$ und damit von $\mathfrak{G}$ liefern, sind die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{vmatrix} \pi_1 & -\frac{1}{2}\pi_1(\pi_1+1) & \pi_{12}^1 \\ \pi_2 & \pi_{12}^2 & \frac{1}{2}\pi_2(\pi_2-1) \\ 0 & (\pi_{12}^1, \pi_1) & 0 \\ 0 & 0 & (\pi_{12}^2, \pi_1) \\ \pi_1 & 0 & 0 \\ \pi_{12}^1 & \frac{1}{2}(\pi_{112}^1 - \pi_{12}^1) & \frac{1}{2}(\pi_{221}^1 - \pi_{12}^1) \\ \pi_{12}^2 & \frac{1}{2}(\pi_{112}^2 - \pi_{12}^2) & \frac{1}{2}(\pi_{221}^2 - \pi_{12}^2) \end{vmatrix}$$

2. Wir bilden nun die π_2-ten Potenzen aller Elemente von $\mathfrak{G}_3$:

$$1 + \pi_2\alpha_1 s_1 + \pi_2\alpha_2 s_2 + \tfrac{1}{2}\pi_2\alpha_{12}s_{12} + \tfrac{1}{1\,2}\pi_2\alpha_{112}s_{112} + \tfrac{1}{1\,2}\pi_2\alpha_{221}s_{221}.$$

Diese sind eine Untergruppe $\mathfrak{H}_2$ der ersten Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{31}$. Die Poincaréschen Zahlen der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{C}_{31}}{\mathfrak{H}_2}$ von $\mathfrak{H}_2$, die wieder Invarianten von $\mathfrak{G}_3$ sind, sind die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{vmatrix} \pi_1 & -\frac{1}{2}\pi_1(\pi_1+1) & \pi_{12}^1 \\ \pi_2 & \pi_{12}^2 & \frac{1}{2}\pi_2(\pi_2-1) \\ 0 & (\pi_1, \pi_{12}^1) & 0 \\ 0 & 0 & (\pi_1, \pi_{12}^2) \\ \pi_2 & 0 & 0 \\ \pi_{12}^1\frac{\pi_2}{\pi_1} & \frac{1}{2}\left(\pi_{112}^1\frac{\pi_2}{\pi_1} - \pi_{12}^1\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\pi_{221}^1\frac{\pi_2}{\pi_1} - \pi_{12}^1\frac{\pi_2}{\pi_1}\right) \\ \pi_{12}^2 & \frac{1}{2}(\pi_{112}^2 - \pi_{12}^2) & \frac{1}{2}(\pi_{221}^2 - \pi_{12}^2) \end{vmatrix}$$

Die Poincaréschen Zahlen der Faktorgruppe des Durchschnitts von der zweiten Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{32}$ mit der Gruppe der π_1-ten oder π_2-ten Potenzen sämtlicher Glieder von $\mathfrak{G}_3$ sind identisch mit bereits bekannten Invarianten.

Das Verfahren, das wir in dieser Arbeit angewandt haben, um aus den Faktorgruppen $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_3$ Gruppeninvarianten herzuleiten, kann man auf jede Faktorgruppe $\mathfrak{G}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ anwenden. Man würde so eine unendliche Reihe von Invarianten der Gruppe $\mathfrak{G}$ erhalten.

Eingegangen 11. Oktober 1929.

Zwei- und Drei-Punktsysteme auf Kurven.

Von *Robert Schumacher* † in München [1]).

Zweipunktesystem.

Unter dem Zweipunktesystem einer Kurve verstehen wir die Mannigfaltigkeit der möglichen Punktepaare auf ihr und gebrauchen dafür allgemein die Bezeichnung S_2. Im Falle, wo die Kurve ein Kegelschnitt K in der Ebene ε ist, wird das Zweipunktesystem durch die Tangenten von K eindeutig auf das Gebiet der Ebene ε abgebildet, das sich außerhalb des Kegelschnittes befindet. Jedem Punktepaar auf K gehört dabei der Schnitt der Tangenten zu, die in den Punkten des Paares berühren, und umgekehrt entspricht jedem Punkte von ε, der außerhalb des Kegelschnittes liegt, ein Punktepaar auf K, das Paar der Berührungspunkte der von ihm ausgehenden Tangenten. Die Punkte des Kegelschnittes entsprechen sich hierbei selbst und sind also in dem Zweipunktesystem als Paare zusammenfallender Punkte aufzufassen; wir nennen sie die „Ordnungspunkte“ oder „Ordnungsgruppen von S_2“.

Die hier geschilderte Abbildung des Zweipunktesystems soll eine „perspektive“ heißen. Ist ε projektiv auf eine andere Ebene bezogen, so ist damit das Zweipunktesystem von K auf letztere Ebene „projektiv“ abgebildet.

Involutionen. Den Punkten einer Geraden L in ε gehören im Zweipunktesystem die Punktepaare einer Involution zu. Die Involution stellt eine Regel dar, die zu jedem Punkte auf K einen zweiten eindeutig finden läßt, wir bezeichnen sie daher in der Folge als „einstufige Regel“ mit R_1. Nach der Lage der Bildgeraden gegen den Kegelschnitt sind drei Arten von Involutionen zu unterscheiden: a) die Bildgerade schneidet den Kegelschnitt nicht; die Involution ist ohne Ordnungspaare und läßt sich also ausnahmslos eindeutig auf eine geschlossene Linie abbilden; b) die Bildgerade schneidet K; die Involution besitzt zwei Ordnungspaare und läßt sich ausnahmslos eindeutig auf eine Strecke abbilden; c) die Bildgerade berührt den Kegelschnitt; die Involution ist eine „starre“, indem ihre Punktepaare den Berührungspunkt der Bildgeraden gemeinsam enthalten. Der Berührungspunkt heiße das „Haupt“ der Involution, sie selbst bezeichnen wir mit $S_1(a)$, wo a das Haupt bedeute.

Büschel von Involutionen. Die Gesamtheit der Involutionen, deren Bildgeraden durch einen Punkt gehen, nennen wir ein Büschel und gebrauchen dafür die Bezeichnung B_1.

---

[1]) *Robert Schumacher* (1860—1924) veröffentliche früher eine Reihe von Arbeiten zur algebraischen Geometrie; außer der Münchner Doktorarbeit (1885) findet man sie in Math. Ann. **37** und **38** und im Crelleschen Journal **110** und **111**. Einige nachgelassene Manuskripte über verwandte Gegenstände wurden mir von der Witwe Sch.s zur Sichtung übergeben. Es sei gestattet, daraus eine Probe zu veröffentlichen. Der Rest des Nachlasses ist in der Univ. Bibl. Jena hinterlegt und steht durch den Reichsleihverkehr jedermann zur Verfügung. Er enthält eine Fortführung dieser Note *n-Punktsysteme auf Kurven*, eine Note über *Reziproke Verwandtschaft* u. a. m.

Herrn Prof. *Zindler*, Innsbruck, möchte ich für seine wertvolle Hilfe in Rat und Tat bei der Durchsicht des Nachlasses herzlich danken. *E. Ullrich.*

Je nachdem der Punkt außerhalb oder innerhalb des Kegelschnittes K liegt, enthalten die Involutionen alle dasselbe Punktepaar oder hat keine mit der andern ein Punktepaar gemein. Ein Büschel B_1 ist durch zwei seiner Involutionen bestimmt und umgekehrt eine Involution durch zwei Büschel, denen sie angehören soll.

Kette und Band. Die Reihe der Punktepaare, die den Punkten eines Kegelschnittes entsprechen, soll eine „Kette" heißen. Insbesondere nennen wir die Kette, die dem Kegelschnitte K selbst entspricht, also von den Paaren zusammenfallender Punkte gebildet wird, die „Ordnungskette" des Zweipunktesystems. Die möglichen Formen der Ketten unterscheiden sich wie die Involutionen nach der Lage, die der Bildkegelschnitt jedesmal gegen den Träger der Punktepaare besitzt. Schneidet z. B. der Bildkegelschnitt den Träger K in vier Punkten, so läßt sich die Kette auf zwei getrennte Linienstücke, schneidet er in zwei Punkten, auf ein Linienstück, und liegt er außerhalb K, auf eine geschlossene Linie abbilden.

Die Gesamtheit der Involutionen, die den Tangenten eines Kegelschnittes entsprechen, nennen wir ein „Band" und insbesondere die Gesamtheit der starren Involutionen das „Ordnungsband" des Zweipunktesystems.

Projektive Beziehungen. Involutionen und Büschel B_1 befinden sich zu ihren Bildern in „perspektiver" Lage. Untereinander stehen Involutionen R_1 und Büschel B_1 in „projektivem" oder „perspektivem" Verhältnis, wenn die ihnen in der Ebene ε entsprechenden Gebilde projektiv bzw. perspektiv aufeinander bezogen sind. Ebenso sagen wir, daß die Zweipunktesysteme zweier Kegelschnitte sich in projektiver oder reziproker Beziehung befinden, wenn dies mit den Ebenen, auf die sie abgebildet sind, der Fall ist. Eine solche projektive Beziehung ist durch vier Zuordnungen von je einer Involution oder einem Büschel des einen Zweipunktesystems zu einer Involution bzw. Büschel des andern festgelegt, wofern keine drei dieser Involutionen einem Büschel angehören bzw. drei der Büschel eine Involution gemein haben.

Besonders hervorzuheben sind die projektiven Beziehungen zweier Zweipunktesysteme, bei denen die Ebenen der Träger so projektiv bezogen sind, daß die Träger einander entsprechen. Eine solche Beziehung nennen wir „konform"; hier ist jeder Ordnungsgruppe wieder eine Ordnungsgruppe und jeder starren Involution wieder eine starre Involution zugeordnet; überhaupt bleibt die Form jeder Involution oder Kette bei der konformen Beziehung erhalten. Eine konforme Beziehung ist nach ihrer Definition durch eine projektive Beziehung der Träger bestimmt.

Eine konforme Beziehung des Zweipunktesystems auf sich selbst heiße eine „Verschiebung", gleichwie wir eine projektive Beziehung von ε auf sich selbst, wobei K sich selbst entspricht, eine projektive Drehung um K nennen.

Polarität. Das Polarsystem in ε, das K zur Ordnungskurve hat, überträgt sich derart auf das Zweipunktesystem, daß jedem Punktepaar die Involution zugehört, die seine Punkte zu Ordnungspaaren hat, und daß überhaupt je ein Büschel und eine Involution als „Pol" und „Polare" einander wechselseitig zugeordnet sind.

Zweipunktesystem der Geraden. Von der Abbildung des Zweipunktesystems eines Kegelschnittes auf die Ebene kommt man ohne weiteres zur Abbildung des Zweipunktesystems einer Geraden, indem man die Gerade projektiv auf den Kegelschnitt bezieht, wodurch sich eine konforme Abbildung des Zweipunktesystems der Geraden auf das des Kegelschnittes ergibt. Die für den Kegelschnitt eingeführten Begriffe werden so auf die Gerade übertragen. Eine perspektive Abbildung des Zweipunktesystems der Geraden auf die Ebene erhält man durch die Tangenten eines die Gerade berührenden

Kegelschnittes, wobei dann jedem Punktepaar der Schnitt der Tangenten zugeordnet ist, die noch von den Punkten des Paares ausgehen.

Dreipunktesystem.

Definition. Unter dem Dreipunktesystem einer Geraden G soll die Mannigfaltigkeit der möglichen Gruppen aus je drei Punkten auf ihr verstanden sein. Unter den Gruppen ist dabei jeder Punkt von G als eine Gruppe aus drei zusammenfallenden Punkten gerechnet und analog jedes Punktepaar auf zweifache Weise als eine Gruppe, die aus einem Punkte und zwei zusammenfallenden Punkten besteht. Die erste Art der besonderen Gruppen soll „Ordnungsgruppen" heißen.

Abbildung auf den Raum. Das Dreipunktesystem ist von derselben Dimension wie die Mannigfaltigkeit der Punkte des Raumes und läßt sich auch in analoger Weise eindeutig auf den Raum beziehen wie das Zweipunktesystem auf die Ebene. Wir legen hierzu durch G zwei Ebenen ε_1 und ε_2 und nehmen darinnen je einen G berührenden Kegelschnitt K und K'. Dadurch ist jedem Punkte von G die Verbindungsebene der Tangenten zugeordnet, die von ihm noch an K und K' gehen. Damit ist aber jeder Dreipunktegruppe auf G ein Punkt im Raume zugewiesen, der Schnitt der den Punkten der Gruppe zugeordneten Ebenen. Umgekehrt entspricht dem Schnitt dreier solcher Ebenen nur eine Dreipunktegruppe, da die Ebenen, die je eine Tangente von K mit einer Tangente von K' vereinigen, ein Ebenenbüschel E von der dritten Ordnung bilden, wofern sich nicht K und K' auf G berühren.

Die hier geschilderte Abbildung des Dreipunktesystems auf den Raum soll eine „perspektive" heißen.

Regeln 2. Stufe. Den Punkten einer beliebigen Ebene des Raumes entsprechen die Gruppen einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, wobei die Punkte auf G so zu Gruppen gereiht sind, daß jedes Punktepaar nur einer Gruppe angehört. Es wird hierdurch eine Regel dargestellt, die zu irgend zwei Punkten auf G einen dritten eindeutig finden läßt. Diese Regeln, die wir im folgenden als „lineare Regeln 2. Stufe" mit R_2 bezeichnen, bilden das Analogon zu den Involutionen des Zweipunktesystems und sind die Elementaroperationen des Dreipunktesystems; ihre Mannigfaltigkeit ist ausnahmslos eindeutig beziehbar auf die Mannigfaltigkeit der Ebenen im Raum.

Starre Regeln. Den Punkten einer Ebene des Büschels E, die G im Punkte a trifft, entsprechen auf G Gruppen, die alle den Punkt a gemeinsam haben.

Die hierdurch dargestellte Regel entsteht dadurch, daß man den Gruppen des Zweipunktesystems von G den Punkt a hinzufügt; wir nehmen dafür die Bezeichnung $S_2(a)$ mit a als „Haupt" der Regel. Da das Strahlenbüschel 2. Ordnung, nach dem eine Ebene von E durch die andern Ebenen des Büschels geschnitten wird, durch diese Ebenen projektiv auf die Gerade G bezogen ist, so ist damit das Zweipunktesystem von G durch die Ebenen des Büschels E auf jede Ebene von E projektiv abgebildet. Dabei liegen die Bilder derselben Gruppe auf einer Achse von E und die Geraden, die derselben Involution entsprechen, bilden eine Regelschar, deren Leitschar aus Achsen von E besteht. Die Bilder eines Büschels von Involutionen sind Strahlenbüschel, deren Zentren auf einer Achse liegen.

Einstufige Regeln. Fügt man allen Gruppen einer Involution R_1 denselben Punkt a_i bei, so entsteht eine einstufige Regel $R_1(a_i)$ des Dreipunktesystems mit dem „Haupte" a_i. Die Gruppen dieser Regel bilden sich nach dem vorigen auf die Punkte einer Geraden ab, die in der durch a_i gehenden Ebene ε_i von E liegt. Ist die Involution des Zweipunkte-

systems starr mit dem Haupte a_k, so entsteht eine Involution $S_1(a_i, a_k)$ mit zwei Häuptern; in der Abbildung entspricht ihr der Schnitt zweier Ebenen ε_i und ε_k des Büschels E, also eine Achse. Fällt a_k mit a_i zusammen, so entspricht der Regel, die wir mit $S_1(a_i^2)$ bezeichnen, die in ε_i gelegene Tangente des Büschels E. Die Gruppe a_i^3, die aus drei zusammenfallenden Punkten besteht, bildet sich in den Oskulationspunkt von ε_i ab.

Involutionen, die eine Regel 2. Stufe in sich schließt. Die Gruppen einer Regel R_2, die denselben Punkt p_ξ enthalten, bilden eine einstufige Regel, die nach Abstreifung jenes Punktes in eine Involution $R_1(p_\xi)$ des Zweipunktesystems übergeht. Es soll nun gezeigt werden, daß die Involutionen, die auf diese Weise der Regel R_2 entspringen, ein Büschel B_1 ausmachen. Ohne weiteres ersichtlich ist dies, wenn zwei der Involutionen eine Gruppe (a_1, a_2) gemein haben, indem dann die starre Involution mit den Häuptern a_1 und a_2 der Regel R_2 angehört und somit jede aus R_2 entspringende Involution R_1 die Gruppe (a_1, a_2) enthält. Andernfalls betrachten wir unsere Abbildung des Dreipunktesystems auf den Raum. Die Ebene ε, auf die sich R_2 abbildet, enthält eine Achse s des Büschels E. Den in R_2 enthaltenen Regeln $R_1(p_\xi)$ entsprechen im Raume die Schnittlinien von ε mit den Ebenen des Büschels E. Da nun diese Schnittlinien alle dieselbe Achse, nämlich s schneiden, so gehen in jeder Ebene von E die Bilder der Involutionen, die bei jenen Regeln $R_1(p_\xi)$ nach Weglassung des Hauptes bleiben, durch den Spurpunkt der Achse s; die genannten Involutionen bilden somit ein Büschel B_1.

Das Büschel B_1 der aus R_2 hervorgehenden Involutionen ist projektiv zur Punktreihe auf G, wenn jeder Involution das ihr in R_2 zukommende Haupt zugeordnet wird. Man erkennt dies wie folgt: b_1 bezeichne das Bild des Büschels B_1 in der dem Büschel E angehörigen Ebene ε_0, und t das Bild einer Involution R_1 von B_1. Man erhält dann das Bild der in R_2 enthaltenen Regel $R_1(p_i)$, indem man das in ε, dem Bilde von R_2, befindliche Bild von R_1 aufsucht. Dies geschieht aber dadurch, daß man durch irgend einen Punkt von t eine Achse außerhalb ε_0 zieht und durch deren Schnitt mit ε die die Achse nicht enthaltende Ebene von E legt. Um so alle Bilder aller in R_2 enthaltenen $R_1(p_\xi)$ zu finden, schneidet man die Strahlen von b_1 durch eine Gerade l und zieht durch die Punkte von l Achsen außerhalb ε_0. Diese Achsen bilden eine zu l und damit zu b_1 projektive Regelschar, die ε nach einem Kegelschnitt schneidet. Durch letzteren ist aber die Regelschar projektiv auf ihre Leitschar bezogen. Die Leitschar liegt aber perspektiv zum Büschel E — jede Ebene von E enthält die ihr zugeordnete Gerade. Damit ist aber E projektiv zu b_1 und somit zu B_1.

Büschel und Bündel von Regeln. Die Gesamtheit der Regeln R_2, die den Ebenen durch eine Gerade entsprechen, nennen wir ein Büschel β_1 und die Gesamtheit der Regeln, die den Ebenen durch einen Punkt entsprechen, ein Bündel 2. Stufe β_2.

Wie eine Ebene im allgemeinen durch drei ihrer Punkte und ein Punkt durch drei durch ihn gehende Ebenen bestimmt ist, so wird eine Regel im allgemeinen durch drei ihrer Gruppen und ein Bündel β_2 durch drei seiner Regeln gegeben. Drei Gruppen, die eine Regel bestimmen, mögen „freie" Gruppen und entsprechend drei Regeln, die keinem Büschel angehören, „freie" Regeln heißen. Ein Büschel β_1 ist immer durch zwei seiner Regeln festgelegt.

Gruppen, die zwei Regeln eines Büschels β_1 gemeinsam sind, gehören allen Regeln von β_1 an; ebenso ist eine in drei freien Regeln enthaltene Gruppe allen Regeln des dadurch bestimmten Bündels gemeinsam.

Unabhängigkeit der eingeführten Begriffe von der Abbildung. Seien E und E' zwei Ebenenbüschel dritter Ordnung, die G perspektiv auf den Raum abbilden, so läßt sich

der Raum projektiv so auf sich selbst beziehen, daß das Ebenenbüschel E' dem Büschel E entspricht und daß sich dabei die Ebenen von E' mit ihren zugehörigen auf G treffen. Eine projektive Beziehung des Raumes auf sich selbst, bei der sich E auf E' abbildet, ist nämlich durch die Zuordnung dreier Elemente von E' zu dreien von E eindeutig bestimmt; man ordnet daher drei Ebenen von E' diejenigen Ebenen von E zu, die sich mit ihnen auf G schneiden. In der so bestimmten projektiven Beziehung schneiden dann die Ebenen von E' und die von E auf G zwei projektive Punktreihen aus, die drei und damit alle entsprechenden Punkte gemein haben. Daraus folgt aber, daß einer Mannigfaltigkeit von Gruppen auf G, der bei der Abbildung auf den Raum mittelst E eine Ebene entspricht, auch bei der Abbildung mittelst E' eine Ebene als Bild zukommt. Ebenso entspricht einem Büschel β_1 bzw. einem Bündel β_2 bei allen Abbildungen ein Ebenenbüschel durch eine Gerade bzw. ein Bündel von Ebenen durch einen Punkt.

Ein anderer Beweis für die Unabhängigkeit des Begriffes der Regel gründet sich auf eine Definition der Regel, die sich unabhängig von der Abbildung aussprechen läßt. Diese geht aus folgendem Satze hervor, dessen Richtigkeit man ohne weiteres aus der Abbildung des Dreipunktesystems erkennt:

Haben drei Involutionen des Dreipunktesystems jede mit der andern eine verschiedene Gruppe gemein, so enthält jede weitere Involution, die mit zwei der drei Involutionen je eine Gruppe gemein hat, auch von der dritten eine Gruppe.

Dementsprechend definieren wir die Regel R_2 in ausreichender Weise als eine Mannigfaltigkeit von Involutionen des Dreipunktesystems, welche folgende Beschaffenheit besitzt:

Zu jedem Punkte als Haupte gehört eine Involution und je zwei der Involutionen haben eine Gruppe gemein (im ersten Teile liegt schon, daß nicht mehr als drei der Involutionen dieselbe Gruppe enthalten). — Dies paßt auch auf die starre Regel, wenn man ihrem Haupte diejenige Involution zuordnet, welche diesen Punkt als doppeltes Haupt besitzt.

Um sonach eine Regel R_2 zu erzeugen, nimmt man alle möglichen Involutionen, die von zwei gegebenen Involutionen mit gemeinsamer Gruppe je eine verschiedene Gruppe enthalten. Man bekommt auf diese Weise sämtliche eine Regel 2. Stufe ausmachenden Involutionen, eine einzige ausgenommen, nämlich die, welche auch die den beiden gegebenen Involutionen gemeinsame Gruppe enthält. Die Bildgeraden der so erhaltenen Involutionen sind bei der Abbildung auf den Raum die Schnitte einer Ebene mit den Ebenen des Abbildungsbüschels E; sie enthalten die Punkte, denen auf G eine Dreipunktegruppe entspricht.

Nimmt man zu jeder Involution einer starren Regel $S_2(a)$ alle Involutionen einer andern Regel $S_2(b)$, die mit ihr eine Gruppe gemein haben, so sind dadurch nach dem Vorausgehenden alle Regeln R_2 des Dreipunktesystems bestimmt.

Projektive Beziehungen. Nachfolgende Definitionen ergeben sich unmittelbar aus der Abbildung des Dreipunktesystems auf den Raum.

Zwei Dreipunktesysteme sind projektiv bezogen, wenn ihre Abbildungen auf den Raum es sind. In einer solchen Beziehung entspricht jeder Regel R_2 des einen Systems eine Regel R_2 des andern und jedem Bündel β_2 des einen ein Bündel β_2 des andern. Die Beziehung ist im allgemeinen durch fünf Zuordnungen von Regeln R_1 oder Bündeln β_2 bestimmt.

Zwei Bündel β_2 sind projektiv bezogen, wenn jeder Regel des einen eine Regel des andern und jedem Büschel β_1 im einen wieder ein Büschel β_1 im andern entspricht. Zwei

Büschel β_1 sind projektiv, wenn ihre Bilder es sind oder, wenn sie in zwei projektiven Bündeln β_2 einander entsprechen.

Vier Regeln R_2 oder Bündel β_2 liegen harmonisch, wenn ihre Bilder harmonische Lage haben.

Ist der Raum, auf den zwei Dreipunktesysteme perspektiv abgebildet sind, projektiv so auf sich selbst bezogen, daß die die Abbildung vermittelnden Ebenenbüschel 3. Ordnung einander entsprechen, so sind die Dreipunktesysteme „konform" aufeinander abgebildet. Eine konforme Abbildung entsteht durch projektive Beziehung der Träger der Punktsysteme; einer Gruppe der einen entspricht die Gruppe des andern, die aus den den Punkten der ersten Gruppe zugeordneten Punkten besteht. Einem singulären Elemente entspricht dabei wieder ein gleichartiges singuläres Element.

Liegen zwei konform bezogene Punktsysteme auf derselben Geraden, so nennen wir ihre Beziehung eine „Verschiebung". Eine Verschiebung ist bestimmt durch die Verschiebung dreier Ordnungsgruppen nach drei beliebigen andern Ordnungsgruppen.

Band. Die Mannigfaltigkeit der Regeln R_2, die in irgendeiner projektiven Beziehung zweier Dreipunktesysteme den singulären Regeln entsprechen, nennen wir ein Band 3. Ordnung. Sein Bild im Raume ist ein Ebenenbüschel 3. Ordnung. Im besonderen heiße die Mannigfaltigkeit der singulären Regeln das Hauptband.

Polarität. Drei Ordnungspunkte a, b und c können nicht gleichzeitig zwei Regeln, also den Regeln eines Büschels β_1 gemeinsam angehören. Denn entweder würde auch die Gruppe (a, b, c) in allen diesen Regeln vorkommen, oder es ginge die sie enthaltende Regel R_2 des Büschels durch eine Verschiebung, die a und b festläßt und c nach irgendeinem Punkte d bringt, in sich selbst über und würde daher auch die Gruppe (a, b, d), nach der (a, b, c) verschoben wird, enthalten; damit würden ihr aber alle Gruppen mit den Punkten a und b angehören, wobei dann eine davon auch allen Regeln des Büschels gemeinsam sein müßte. In beiden Fällen würden also letztere Regeln die Gruppe (a, a, a) und eine Gruppe (a, b, x), also eine Involution $R_1(a)$, gleicherweise aber auch eine solche $R_1(b)$ gemeinsam enthalten, was nicht möglich ist.

Da somit drei beliebige Ordnungspunkte eine einzige Regel bestimmen, so ist jeder Gruppe im Dreipunktesystem eine Regel beigeordnet, nämlich die, welche die Punkte der Gruppe als Ordnungspunkte besitzt. Diese Beiordnung von Gruppe und Regel soll unter der Polarität des Dreipunktesystems verstanden sein. Die Gruppe heiße der Pol der Regel und die Regel die Polare der Gruppe.

Es soll nun gezeigt werden, daß jede Gruppe ihrer Polaren angehört.

Die Gruppe bestehe aus den Punkten a, b und c, und R_2 sei ihre Polare. Da zwei starre Regeln der Form $S_1(x^2)$ keine Gruppe gemein haben und also nicht derselben Regel angehören, so können wir voraussetzen, daß $S_1(c^2)$ nicht in R_2 enthalten sei. Wir nehmen nun die Verschiebung vor, die a involutorisch in b überführt und c fest läßt, Hierdurch wird R_2 und damit auch die darin enthaltene Involution mit dem Haupte c, die mit $R_1(c)$ bezeichnet sei, in sich selbst verschoben. Ein Ordnungspunkt von R_1 ist c, der andere, da $R_1(c)$ von $S_1(c^2)$, also R_1 von $S_1(c)$ verschieden sein soll, ein von c verschiedener Punkt d. Bei der Verschiebung muß auch die Gruppe (c, d, d) festbleiben, da sie wieder in eine Gruppe von $R_1(c)$ mit einem doppelt zu rechnenden Punkte übergeführt wird. Da somit der Punkt d bei der Verschiebung ebenfalls festbleibt und a und b involutorisch ineinander übergehen, so sind a und b harmonisch konjugiert in bezug auf c und d, so daß die Gruppe (a, b) der Involution R_1 und damit die Gruppe (a, b, c) der Involution $R_1(c)$ angehört. (a, b, c) ist folglich in R_2 enthalten.

Man erkennt zugleich, daß die Regel R_2 keinen weiteren Ordnungspunkt x besitzen kann. Denn sonst würden in ihr die Gruppen (a, b, c) und (a, b, x), also die Involution $S_1(a, b)$ und gleicherweise die Involution $S_1(c, x)$, vorkommen. Da aber diese Involutionen keine Gruppe gemein haben, so können sie auch nicht derselben Regel angehören.

Enthält R_2 die starre Involution $S_1(a^2)$, so kann, da dieser alle den Punkt a enthaltenden Gruppen von R_2 angehören, die Gruppe (a, b, c) nur in R_2 vorkommen, wenn b mit a zusammenfällt. Wir bezeichnen deshalb a als zweifachen Ordnungspunkt von R_2 und die Gruppe (a, a, c) als den Pol von R_2.

Die Involution $R_1(c)$ gehört offenbar jeder Regel R_2 an, die zu einer ihrer Gruppen polar ist. Dies gilt von jeder Involution, die einen Ordnungspunkt des Dreipunktesystems enthält.

Den Gruppen einer starren Involution mit zwei verschiedenen Häuptern sind die Regeln polar, die die Häupter zu Ordnungspunkten haben. Das Büschel dieser Regeln ist durch die Polarität perspektiv auf die Involution bezogen.

Durch die Polarität ist auch das Bündel der Regeln, die den Ordnungspunkt a gemeinsam enthalten, zur starren Regel $S_2(a)$ und damit zum Zweipunktesystem projektiv gesetzt, indem jeder zur Gruppe (a, x, y) polaren Regel die zu (x, y) polare Involution entspricht.

Zum Beweise setzen wir das Zweipunktesystem S_2, das von dem Kegelschnitte K getragen werde, perspektiv zu dessen Ebene ε und bilden auch das Bündel projektiv so auf eine Ebene ε_1 ab, daß jeder Regel in ε_1 ein Punkt zugeordnet sei. Dem Bilde einer Gruppe (x, y) entspricht dann in ε_1 ein Punkt, das Bild der Polaren zur Gruppe (a, x, y). Beschreibt das Bild von (x, y) eine Tangente an K, so durchläuft, da die Polaren zu den Gruppen einer starren Involution $S_1(a, x)$ ein zu ihr projektives Büschel bilden, auch der in ε_1 entsprechende Punkt eine dazu projektive gerade Punktreihe. Gleichwie die Tangenten von K, so schneiden auch die ihnen in ε_1 zugeordneten Geraden irgend zwei von ihnen projektiv und umhüllen folglich einen zu K projektiven Kegelschnitt K'. Die geschilderte Beziehung zwischen den Ebenen ε und ε_1 ist daher, indem darin jedem Schnittpunkte zweier Tangenten an K der Schnitt ihrer entsprechenden an K' zugeordnet wird, projektiv. Das Bündel der Regeln mit dem gemeinsamen Ordnungspunkte a ist somit auch so projektiv auf ε bezogen, daß jeder Regel ein Punkt oder, wenn wir an dessen Stelle seine Polare in bezug auf K setzen, eine Gerade entspricht. Damit ist aber das Bündel auf S_2 so projektiv bezogen, daß je eine Regel und eine Involution in der im Satze angegebenen Weise einander zugeordnet sind. Daraus folgt insbesondere, daß den Gruppen einer beliebigen Involution $R_1(a)$ die Regeln eines Büschels in perspektiver Weise polar sind: jeder Involution ist ein Büschel „polar". Haben somit die Regeln eines Büschels einen Ordnungspunkt gemein, so bilden die weiteren Ordnungspunkte je die Punktepaare einer Involution; und umgekehrt gehören die Regeln mit gemeinsamem Ordnungspunkte, deren weitere Ordnungspunkte je aus den Punktepaaren einer Involution bestehen, demselben Büschel an.

Die Polaren zu den Gruppen einer Regel R_2 machen die Mannigfaltigkeit der mit drei Ordnungspunkten versehenen Regeln eines Bündels β_2 aus. Denn jeder Involution $R_1(x)$ von R_2 ist ein Büschel polar und zwei solcher Büschel haben je eine Regel gemein, gleichwie ihre polaren Involutionen eine Gruppe. Je drei der Involutionen enthalten dieselbe Gruppe und also je drei der Büschel dieselbe Regel. Die Büschel gehören somit alle demselben Bündel an; dieses heiße zur Regel polar.

Enthält R_2 den Ordnungspunkt a, so gehört ihrem polaren Bündel die Regel $S_2(a)$

an; besitzt also R_2 drei Ordnungspunkte a, b und c, so kommt die Gruppe (a, b, c), also der Pol von R_2, in allen Regeln des polaren Bündels vor.

Im vorstehenden Satze liegt zugleich der folgende:

Enthält eine Regel mit drei Ordnungspunkten den Pol einer andern, so enthält auch diese den Pol jener.

Übertragen wir das bisherige durch die Abbildung des Dreipunktesystemes auf den Raum, so erhalten wir eine reziproke Verwandtschaft und im besonderen ein Nullsystem. Dem Ebenenbüschel 3. Ordnung, das die Abbildung vermittelt, entspricht dabei eine Raumkurve 3. Ordnung, auf die sich also die Reihe der Ordnungspunkte abbildet.

Fundamentalaufgabe. „Gegeben sind drei Gruppen γ_1, γ_2, γ_3; es ist die sie enthaltende Regel R_2 zu bestimmen und insbesondere zu irgend zwei Punkten a_μ und a_ν auf G der dritte durch die Regel R_2 zugeordnete Punkt mittels linearer Konstruktion in einer Ebene zu finden."

Bildet man das Zweipunktesystem S_2 von G auf eine Ebene ε durch G mittels eines G berührenden Kegelschnittes K ab, so ist damit auch jede singuläre Regel $S_2(a)$ des Dreipunktesystems auf die Ebene ε, in der die Konstruktion zu geschehen hat, projektiv abgebildet. Eine Regel R_2 nehmen wir nun als bestimmt an, wenn irgend zwei Involutionen $R_1(a_i)$ bekannt sind, die sie mit je zwei Regeln $S_2(a_i)$ gemein hat; denn dann können wir ohne weiteres auch die Involution angeben, die R_2 mit einer beliebigen anderen Regel $S_2(a_\lambda)$ gemein hat.

Wir nehmen zur Bestimmung von R_2 zwei singuläre Regeln $S_2(a_1)$ und $S_2(a_2)$, von denen die eine die Gruppe γ_1, die andere die Gruppe γ_2 enthält, wobei dann a_1 ein Punkt von γ_1 und a_2 ein Punkt von γ_2 sein muß. Da R_2 auch γ_3 enthalten soll, so muß sie mit einer der drei γ_3 enthaltenden Regeln — sie heiße $S_2(a_3)$ — eine Involution $R_1(a_3)$ bestimmen, die γ_3 enthält. Die drei Regeln $R_1(a_1)$, $R_1(a_2)$ und $R_1(a_3)$, die R_2 mit einer der Regeln $S_2(a_1)$, $S_2(a_2)$ und $S_2(a_3)$ gemein hat, müssen aber offenbar zu zweien mit je einer der drei Regeln $S_1(a_1, a_2)$, $S_1(a_1, a_3)$ und $S_1(a_2, a_3)$ eine Gruppe gemein haben. Überträgt man die Aufgabe, die wir jetzt zu lösen haben, auf den Raum, so lautet sie hier: Gegeben sind drei Ebenen und in jeder ein Punkt; durch jeden dieser Punkte in seiner Ebene eine Gerade derart zu ziehen, daß sich die drei Geraden zu zweien auf einer der Schnittlinien der Ebenen treffen.

Bei der perspektiven Abbildung der Regeln $S_2(a_1)$, $S_2(a_2)$ und $S_2(a_3)$ auf die Ebene ε, die durch den Träger des Dreipunktesystems gelegt worden ist, entspricht der Regel $S_1(a_1, a_2)$, da sie zwei Regeln $S_2(a_1)$ und $S_2(a_2)$ angehört, zweimal eine Tangente des Abbildungskegelschnittes K; die eine t_2 geht durch a_2, die andere t_1 durch a_1. Die Punkte von t_2 und t_1, die dabei derselben Gruppe von $S_1(a_1, a_2)$ zugehören, liegen selbst je auf einer Tangente, so daß die zugehörigen Gruppen zwei projektive Punktreihen (t_2) projektiv (t_1) bilden. Ähnlich ist es mit der Regel $S_1(a_1, a_3)$, der die projektiven Punktreihen (t_3) projektiv (t_1) entsprechen und mit $S_1(a_2, a_3)$, der die Punktreihen (t_3) projektiv (t_2) zugeordnet sind. Den Involutionen $R_1(a_i)$, wo $i = 1, 2$ oder 3, die die Gruppe γ_i enthalten, entsprechen in ε die Geraden eines Büschels mit dem Zentrum q_i. Wir haben nun die Aufgabe, durch q_1, q_2 und q_3 je eine Gerade l_1, l_2 und l_3 so zu ziehen, daß der Schnitt von l_1 mit t_2 dem Schnitt von t_1 mit l_2 in der obigen projektiven Beziehung zugehört und daß überhaupt der Schnitt von l_i mit t_k dem Schnitt von l_k mit t_i in den obigen Projektivitäten entspricht. Ziehen wir also durch q_1 eine Gerade l_1^*, die t_2 und t_3 in den Punkten m_2^* und m_3^* trifft und verbinden den zu m_2^* auf t_1 gehörigen Punkt m_1^* mit q_2 durch eine Gerade l_2^*, die t_3 in m_3^* treffe, so muß die Verbindungsgerade des zu m_3^* auf t_1 gehö-

rigen Punktes n_1^* mit dem zu n_3^* auf t_2 gehörigen Punkte n_2^* durch den Punkt q_3 gehen. Beschreibt aber l_1^* das ganze Geradenbüschel durch q_1, so beschreiben n_1 auf t_1 und n_2 auf t_2 projektive Punktreihen, die perspektiv liegen, da der Schnitt von t_1 mit t_2 offenbar sich selbst entspricht. Wir haben daher zur Auffindung von l_1, l_2 und l_3 nur das Projektivitätszentrum für die Punktreihen n_1^* und n_2^* zu zeichnen, indem wir zwei einander zugeordnete Punkte der Punktreihen bestimmen, und dieses mit q_3 zu verbinden.

Sind l_1 und l_2 als Bilder der Involutionen $R_1(a_1)$ und $R_1(a_2)$ gefunden, die R_2 mit $S_2(a_1)$ und $S_2(a_2)$ gemein hat, so bestimmt man die gemeinsame Involution von R_2 mit irgendeiner singulären Regel $S_2(a_\mu)$ wie folgt: Man bestimmt die Gruppen, die $S_2(a_\mu)$ mit $R_1(a_1)$ und $R_1(a_2)$ gemein hat — es seien dies die Gruppen (a_1, a_μ, a_ξ) und (a_2, a_μ, a_η) — und verbindet in ε das Bild des Punktepaares (a_1, a_ξ) mit dem von (a_2, a_η) durch eine Gerade l_μ, so ist l_μ das Bild der gesuchten Involution. a_ξ und a_η selbst findet man als Spuren der Tangenten, die man vom Schnitt der durch a_μ außer G gehenden Tangente mit l_1 bzw. l_2 noch an den Kegelschnitt K ziehen kann. Will man endlich den zu a_μ und a_η durch die Regel R_2 zugeordneten dritten Punkt bestimmen, so hat man den Punkt zu suchen, der in der zu l_μ gehörigen Involution mit a_ν zu einem Punktepaar vereinigt ist.

Eingegangen 5. Januar 1930.

Berichtigung zu einer früheren Arbeit.

Von *F. Löbell* in Stuttgart.

In meiner in Bd. 162 dieses Journals S. 114 ff. abgedruckten kleinen Arbeit „Ein Satz über die eindeutigen Bewegungen Clifford-Kleinscher Flächen in sich“ muß es auf Seite 115, Zeile 14 u. 15 (neben Fig. 1), wie übrigens auch aus dem Zusammenhang sogleich hervorgeht, heißen: „Sie werde zunächst als eine Killingsche Fläche gedacht“ (statt: „. . . Nicht-Killingsche . . .“).

Berichtigung

zu der Arbeit von *E. Kamke*, „Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung“; diese Zeitschrift, Bd. 162, S. 185—197. Man lese auf S. 194

Zeile 3: $\sin^2 y$ *statt* y^2;
Zeile 12: dem Horizontalstreifen $0 < y < \pi$ *statt* der unteren Halbebene;
Zeile 13: $\sin^2 \overline{\varphi}$ *statt* $\overline{\varphi}^2$;
Zeile 18: die durch Q gehende Parallele zur y-Achse *statt* x-Achse;
Zeile 18: unterhalb *statt* rechts von.

Tübingen, 3. 7. 1930. Kamke.